

学位論文題名

Dynamics of a front-back pulse in a bistable reaction-diffusion system with jump-type heterogeneity

(ジャンプ型の非一様性をもつ双安定反応拡散系におけるフロントバックパルスのダイナミクス)

学位論文内容の要旨

自然界で見られる様々なパターン形成を記述するモデル方程式として、反応拡散系とよばれる非線形偏微分方程式のクラスがある。反応拡散系では、考える方程式や条件によりラセン波やパルスの分裂、時空カオスといった多様なパターンが現れることが数値計算などにより知られているが、とりわけ進行パルスや進行スポットといった空間局在解は多くの系で見られる遍在的なパターンである。一方で自然界には温度変化や化学物質の勾配といった非一様性が存在しており、そのような非一様性がパターン形成に与える影響について近年多くの研究がなされている。したがって、反応拡散系に現れる空間局在パターンが、系がもつ非一様性（ここでの非一様性は方程式に含まれるパラメータが時間的、もしくは空間的に変動することを意味する）と相互作用することで生み出すダイナミクスが重要な問題となる。特にそのメカニズムを力学系の観点から解明することで、ダイナミクスの背後にある普遍的な数理構造が明らかになると考えられる。反応拡散系は非線形性に応じて単安定性のもの、双安定性のもの、振動性のものに大きく分けられ、いずれの場合も進行パルスや進行スポットといった空間局在解が存在することが知られている。なかでも特に単安定性の場合については非一様媒質中でのダイナミクスが分岐理論の観点から比較的良好に調べられてきたが、一方で双安定性の場合についてはほとんど調べられてこなかった。双安定性のパルス(フロントバックパルス)は2つの界面、具体的には相互作用する2つのフロント解からなるのが特徴であり、したがって非一様媒質中ではフロント同士の相互作用に加え、非一様性と各フロントとの相互作用を考える必要がある。

本研究では2成分の反応拡散方程式を用いて、進行パルスのジャンプ型の非一様性(あるパラメータが空間の一点を境に変化する)をもつ双安定系でのふるまいを調べた。パルスの速度とジャンプの高さに相当する2つのパラメータを変化させると数値的に5つの異なるふるまい (penetration, traveling-breather, rebound, annihilation, decomposition) がみられるが、主に decomposition と、rebound でみられる sliding motion について解析を行いそのメカニズムを調べた。decomposition は進行パルスがジャンプ位置を越えると2つの界

面幅が広がってゆき、最終的に2つのフロント解に分解してしまう現象で、一方 sliding motion では、パルスがジャンプ位置を越えてから振動パルスへと変化するが、一ヶ所に留まることなく振動しながら一方向へ移動がみられる。いずれも無限遠での遅いダイナミクスが関わってくるため、その分岐理論的なメカニズムを数値的に調べるのが難しく、代わりに解析的な取り扱いが有効となる。解析を行うにあたり、申請者は2成分からなる偏微分方程式のうち1成分を界面方程式に置き換えた極限方程式(ハイブリッド系)を用いた。ハイブリッド系を用いる大きな利点は、進行パルス解および進行フロント解の存在と安定性について解析的に知ることができることである。これによりまず decomposition が起こるメカニズムが説明できる。すなわち、無限遠における進行パルスが存在しないためパルスが2つのフロント解に分解し、さらにフロント解の saddle-node 分岐により分解後の界面のふるまいに差異が生じることが示される。一方の sliding motion を調べるにあたり、申請者はまず空間が一様な場合で中心多様体縮約を行い、Hopf 分岐点近傍に安定な振動パルス解が存在することを示した。一般に、中心多様体縮約により有限次元の常微分方程式が得られ、その係数が分岐の性質を決める重要な量となるが、非自明解についてこの係数を解析的に計算することは一般には難しく、ほとんどの場合数値的な手法に頼ることになる。今回のようなパルス解では接合漸近展開などの摂動法により解析的に求めることは可能であるものの、多大な計算が必要となる。本研究ではハイブリッド系の区分線形性を利用することでこの係数を解析的にかつ大幅に少ない計算量で求め、Hopf 分岐の supercriticality を示している。次いでジャンプ型の非一様性がある場合には、非一様性を摂動的に扱うことで空間一様な場合とほぼ同様の議論が可能となり、振動パルスの並進対称性が破れることで必ず一方向への移動が起こることを明らかにした。

学位論文審査の要旨

主査	教授	坂上 貴之
副査	教授	長山 雅晴
副査	教授	西浦 廉政 (東北大学大学院理学研究科)
副査	助教	斉木 吉隆

学位論文題名

Dynamics of a front-back pulse in a bistable reaction-diffusion system with jump-type heterogeneity

(ジャンプ型の非一様性をもつ双安定反応拡散系におけるフロントバックパルスのダイナミクス)

博士学位論文審査等の結果について (報告)

自然界で見られる様々なパターン形成を記述するモデル方程式として、反応拡散系とよばれる非線形偏微分方程式のクラスがある。反応拡散系では、考える方程式やパラメータに様々な時空間パターンが現れることが知られているが、とりわけ進行パルスや進行スポットといった自発的に動き回る空間局在パターンは多くの系で見られる普遍的なパターンである。そのダイナミクスは力学系、特に分岐理論の観点から研究が進められているが、これはダイナミクスの分岐構造を明らかにすることで、系の詳細を越えた、ダイナミクスの背後にある普遍的な数理構造が抽出できると考えられるためである。

一方、自然界には完全に一様な状態はなく、温度変化や化学物質の濃度勾配といった非一様性が少なからず存在している。自然現象のモデル方程式という立場からすれば、そのような非一様性がパターン形成に与える影響について調べるのが重要な課題となる。実際、このような研究は近年注目を集めており、数値的な結果は多く得られているが、厳密な結果は極めて不十分な状況である。

本研究の主題は、自然界に普遍的に見られる空間局在パターンと非一様性との相互作用によりどのようなダイナミクスが現れ、それを引き起こす分岐理論的なメカニズムは何か、ということである。そのような研究として、これまで単安定媒質に現れるパルスやスポットを対象に調べられているが、その他の媒質についてはほぼ手付かずの状態であった。とくに本研究では双安定媒質にみられるパルス (フロントバックパルス) を用いてこれを調べた。具体的には、2成分の反応拡散方程式を用いて、進行パルスのジャンプ型の非一様性 (あるパラメータが空間の一点で境に変化する) をもつ双安定系でのふるまいを調べた。フロントバックパルスは相互作用する2つのフロント解から構成されており、したがって非一様媒質中ではフロント同士の相互作用に加え、非一様性と各フロントとの相互作用が出てくる。このため単安定の場合には見られないダイナミクスが期待される。研究の成果は主に次の2つである。

1つ目は、パラメータを変化させることで5つのふるまい (penetration, traveling-breather, rebound, annihilation, decomposition) が数値的に確認できるが、その中の decomposition と、rebound でみられる sliding motion について解析的にメカニズムを明らかにしたことである。具体的には、decomposition はジャンプ後の一様な系での進行パルス解と進行フロント解の (非) 存在が、また sliding motion は standing-breather 解の並進対称性が非一様性により破れることが、ダイナミクスを引き起こす原因であることが示された。これらはいずれも単安定の場合では知られていないふるまいである。

2つ目は、sliding motion を調べる際に用いた解析についてである。方程式に含まれる微小パラメータの特異極限をとることで、2成分からなる偏微分方程式のうち1成分を常微分方程式に置き換えられることが知られている。申請者はこの方程式系(ハイブリッド系)を用いて上記2つのふるまいを解析しているが、注目すべきは中心多様体縮約にこれを用いている点である。一般に、中心多様体縮約により分岐点近傍でのパルスの運動を記述する有限次元の常微分方程式(標準形)が得られる。この標準形に含まれる係数の値により分岐の性質が決まるが、これを解析的に計算することは接合漸近展開などの摂動法により可能ではあるものの、多大な計算が必要となる。本研究ではハイブリッド系の区分線形性を利用することでこの係数を解析的にかつ大幅に少ない計算量で求め、Hopf 分岐の supercriticality を示している。また、区分線形性に起因する界面での関数の不連続性が現れるが、これも正則化により回避できることが示されている。

ハイブリッド系を用いた線形安定性解析はこれまで行われてきたが、これを中心多様体縮約に用いるのは初めての試みであり、中心多様体の標準形の係数を求める新たな解析的手法を提示したといえる。また、decomposition と sliding motion というこれまで見られていないふるまいのメカニズムを解析したことで、非一様な双安定媒質のダイナミクスの一端を明らかにしただけではなく、媒質や分岐構造の違いからくるダイナミクスの変化の解明へとつながる極めて重要な研究といえる。

以上の成果を鑑み、著者は北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認める。