

学 位 論 文 題 名

Differential operators on hyperplane arrangements

(超平面配置に関する微分作用素)

学位論文内容の要旨

本論文は超平面配置に関する斉次微分作用素のなす加群の自由性に関する研究である。

K を標数 0 の体とし, $S = K[x_1, \dots, x_\ell]$ を K 上の多項式環とする. ℓ 次元ベクトル空間 $V = K^\ell$ の原点を通る余次元 1 のアフィン部分空間 (超平面) の有限集合 $\mathcal{A}$ を中心的超平面配置と呼ぶ. また $\mathcal{A}$ に属する超平面 H に対して, $\ker p_H = H$ となる V^* の一次の斉次多項式を一つ固定する. $Q := Q(\mathcal{A}) := \prod_{H \in \mathcal{A}} p_H$ とおいて, $\mathcal{A}$ の定義多項式と呼ぶ.

Q で生成されるイデアルを保存する S から S への導分 θ を $\mathcal{A}$ -導分という ($K = \mathbb{R}$ のとき, 幾何学的には $\mathcal{A}$ に沿った多項式ベクトル場である). $\mathcal{A}$ -導分全体のなす加群 ($\mathcal{A}$ -導分加群) が S -加群として自由であるか否かは興味深い問題で, 多くの研究者によって研究されている.

非負整数 m に対して, $D^{(m)}(S) := \bigoplus_{|\alpha|=m} S \partial^\alpha$ とおく. ただし, $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$ は多重指数であり, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_\ell^{\alpha_\ell}$ である. 今

$$D^{(m)}(\mathcal{A}) := \{\theta \in D^{(m)}(S) \mid \theta(QS) \subseteq QS\}$$

を m 階の斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群といい, $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の元を斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素という. $m = 1$ のとき即ち, $D^{(1)}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ -導分加群であり, $D^{(m)}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ -導分加群の自然な拡張である. 本論文は, $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の自由性に関する研究をまとめた論文である.

$\mathcal{D}(S) = \bigoplus_{m \geq 0} D^{(m)}(S)$ は Weyl 代数と呼ばれる. QS の idealizer

$$\mathbb{I}(QS) = \{\theta \in \mathcal{D}(S) \mid \theta(QS) \subseteq QS\}$$

は斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群の直和 $\mathbb{I}(QS) = \bigoplus_{m \geq 0} D^{(m)}(\mathcal{A})$ に分解されることが知られている (Holm). このことから斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群の生成系を知ることによって S/QS の微分作用素環 $\mathbb{I}(QS)/Q\mathcal{D}(S)$ の生成系を知ることができる. S/QS の微分作用素環の生成系を求めることが, 斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群の基底を求めることの一つの動機である.

論文の前半である第二章の内容は, ジェネリックな超平面配置についての研究である. Holm は, $\mathcal{A}$ がジェネリックな超平面配置のときに, いくつかの (階数・次元・ $\mathcal{A}$ に含まれる超平面の数に関する) 条件の下で斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群の自由性を決定した. また, 彼は残りの場合について “斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群は自由加群である.” と予想した. また, この研

究に関連して Snellman はジェネリックな超平面配置の斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群が自由でないときの Hilbert 級数を計算し、Poincaré-Betti 級数の具体的な表示を予想した。

上で述べた Holm と Snellman の予想を、第 2.7 節、第 2.9 節で、肯定的に解決した。Holm の予想に関しては、斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群が自由加群であると予想されていた場合に基底の候補を構成し、(Saito の判定法の拡張である) Saito-Holm の判定法を使い、候補が基底をなすことを証明した。また、斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群が自由でないときは、極小自由分解を構成し、射影次元と Betti 数を求めた。この極小自由分解により Snellman の予想が正しいことがわかった。

下の表は 3 次元以上のジェネリック超平面配置がどのような条件で自由になるかと射影次元を表した表である。 m は階数、 r は超平面配置に含まれる超平面の数、 ℓ はベクトル空間の次元とする。

条件	$m < r - \ell + 1$	$m = r - \ell + 1$	$m > r - \ell + 1$
自由性	自由でない (Holm)	自由 (Holm)	自由
射影次元	$\ell - 2$	0 (Holm)	0

論文の後半である第三章の内容は、Coxeter 配置についての研究である。有限 Coxeter 群を鏡映群とみたときの鏡映面全体の集合は超平面配置であり、Coxeter 配置と呼ばれている。Coxeter 配置は超平面配置の重要な具体例の一つである。Saito により、鏡映群の基本不変式から $\mathcal{A}$ -導分加群の基底を構成できることが知られている。

以下では $\mathcal{A}$ を A 型、 B 型、 D 型の Coxeter 配置とする。本研究では、まず型ごとに 2 階の斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群の基底の候補を見つけ、その候補が基底をなすことを示す。その際に鍵となるのが “compound determinants に関する Cauchy-Sylvester の定理” と “Saito-Holm の判定法” である。

基底の構成には Schur 多項式を使う。例えば、 A 型の場合、Schur 多項式を係数とする斉次微分作用素を定義する。それらの作用素の係数行列の行列式を見ると Vandermonde の 2 次小行列式を成分とする行列の行列式と定義多項式のベキの積であることがわかる。以上の議論より、候補が基底であることを証明した。

また、本研究で構成した基底で生成される $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を自然な作用で Coxeter 群の表現とみると、自明な表現と鏡映表現の直和に分解される。ここで、鏡映表現の重複度は 1 である。さらに、以上の事実から 2 階の斉次 $\mathcal{A}$ -微分作用素の加群には Coxeter 群の作用で不変な元のみからなる基底は存在しないことを証明した。

学位論文審査の要旨

主査	教授	齋藤	睦
副査	教授	寺尾	宏明
副査	教授	山下	博
副査	准教授	吉永	正彦

学位論文題名

Differential operators on hyperplane arrangements

(超平面配置に関する微分作用素)

博士学位論文審査等の結果について (報告)

超平面配置は空間内の有限個の余次元1の空間(超平面)の集まりのことであり、数学の多様な分野で登場してくる。また、その研究も代数、組合せ論、トポロジーなど多方面からのアプローチが可能であり、大変興味深い対象である。とりわけ、超平面配置に関する導分(1階の斉次微分作用素)の成す加群は多くの研究者の興味を引き、多くの研究が為されてきた。特に重要なのが、その導分の成す加群が多項式環上自由であるかどうかという問題である。

本論文では、導分の成す加群の代わりに高階の斉次微分作用素の成す加群の自由性を考察した。論文の前半では、ジェネリックな超平面配置に関して、高階の斉次微分作用素の成す加群が自由であるかどうかを決定し、自由でない場合はその極小自由分解を構成した。これは導分の場合の Rose-Terao, Yuzvinsky氏らの結果の一般化であるとともに、Holm氏らによる先行する研究が残っていた場合も含めて完全に決定したことで意義深い。論文の後半では、古典型コクセター配置と呼ばれる場合について、2階の斉次微分作用素の成す加群が自由であることを実際に基底を構成することにより示した。コクセター配置は非常に対称性の高い対象で、表現論を初めとする多くの分野の研究者が興味を持っている。

著者によるこれらの成果は、超平面配置、表現論及び関連する理論において大変重要なものである。

よって著者は北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認められる。