

## 学位論文題名

## Ulam's cellular automaton and Rule 150

(ウラムのセル・オートマトンとルール 150)

## 学位論文内容の要旨

本論文は、結晶の成長モデルとしてウラムによって提案された二次元のセルモデルを単純化したウラムのセル・オートマトンに関して得られた結果をまとめたものである。ウラムのセル・オートマトンは二次元格子状上に非線形な局所規則によって定義された離散力学系である。その部分力学系としてエレメンタリー・セル・オートマトンのひとつであるルール 150 を持つこと、すなわちウラムのセル・オートマトンにルール 150 が埋め込まれていることを示した。超離散化とは偏微分方程式を離散化しセル・オートマトンを構成する方法であるが、その逆の操作を行う手法は逆超離散化と呼ばれている。あるセル・オートマトンに対して逆超離散化を行う際、偏微分方程式を構成する方法は一意に定まらないため、元のセル・オートマトンの性質を保存するような偏微分方程式を導出することに成功している例は少ない。本論文では、ウラムのセル・オートマトンを逆超離散化することによって得られた偏微分方程式が元のセル・オートマトンの性質をよく保存していることを以下の二つ方法で確認した。まず、ウラムのセル・オートマトンはある初期値から描く軌道がフラクタル状のパターンになることから、偏微分方程式の数値解でも対応する初期値から同様のフラクタル状のパターンを再現できることを示した。また、ある部分空間における偏微分方程式の数値解のパターンが、ルール 150 を逆超離散化して得られた偏微分方程式の数値解のパターンを再現していることを示した。さらなる考察として、ウラムのセル・オートマトンによって生成されるパターンの境界の部分列における極限のフラクタル次元を計算し、これらがフラクタル図形であることを証明した。さらに、パターンを構成するセルの個数の時間発展に伴う変化が、ルベグ特異関数と呼ばれる単調増加な自己アフィンな関数によって表されることから、パターンの時間発展もフラクタル的であることを発見した。本論文は 5 章と付録からなる。

第 1 章は序文であり、研究の動機、背景、目的と各章の概要を述べている。

第 2 章では位相力学系、記号力学系とセル・オートマトンの定義と分類を与え、逆超離散化によってセル・オートマトンから偏微分方程式を導く手順を与えている。

第 3 章ではウラムのセル・オートマトンとルール 150 の位相的な関係について述べている。ルール 150 は局所規則が線形でありながらもカオス的な挙動を示すエレメンタリー・セル・オートマトンのひとつである。エレメンタリー・セル・オートマトンは、局所規則

が3つのセルのみによって決まる最もシンプルな一次元セル・オートマトンのクラスである。ウラムのセル・オートマトンは結晶の成長を模したようなフラクタル状のパターンを描く軌道を持つ力学系であるが、同程度連続な点を空間内に稠密に持つような力学系であることを示す。この証明はブロッキング・パターンと呼ばれる、時間発展に対して最終的に不変になるようなパターンの存在を用いて示したものである。ウラムのセル・オートマトンは他にもサイズ無限大のブロッキングパターンを持つが、このようなパターンが現れる部分空間においてウラムのセル・オートマトンの部分力学系を構成することに成功した。この部分力学系がルール150と位相共役になっていることを証明する。ウラムのセル・オートマトンの部分空間における時間発展パターンを観察すると、ルール150の時間発展パターンが埋め込まれていることが分かる。さらに、この二つのセル・オートマトンの位相的な関係を用いて、力学系の複雑さの指標のひとつである位相的エントロピーに関する結果が得られる。ルール150はカオス的な力学系で、位相的エントロピーが正の値を取ることは既に知られている。一般に、位相的エントロピーがゼロではなく正の値を取るとその力学系はカオス的であると判断されることが多いが、ウラムのセル・オートマトンの位相的エントロピーは無限大の値をとることを示す。

第4章ではウラムのセル・オートマトンを逆超離散化した結果について述べている。逆超離散化によって得られた偏微分方程式がウラムのセル・オートマトンの性質をよく保存していることを以下の二つの方法で示している。まず、ウラムのセル・オートマトンはある初期値から描く軌道が結晶の成長を模したフラクタル状のパターンになることから、偏微分方程式の数値解でも対応する初期値から同様のフラクタル状のパターンを再現できることを示す。さらに、第3章で証明したウラムのセル・オートマトンとルール150の関係より、ある部分空間における偏微分方程式の数値解のパターンが、ルール150を逆超離散化して得られた偏微分方程式の数値解のパターンを再現していることを示す。任意のエレメンタリー・セル・オートマトンの局所規則はブール演算によって表すことができるため、逆超離散化可能であることは既に知られている。

第5章では本論文のまとめと今後の展望について述べている。

付録ではさらなる考察として、ウラムのセル・オートマトンが生成する結晶の成長を模したパターンについてこれがフラクタル図形であることを示す。パターンの成長過程において一度発生したセルは永久に存在し続け、一旦発生したセルが死滅することはない、パターンは二次元のセル空間で上下左右に対称に成長し続ける。パターンの境界の部分列における極限のフラクタル次元を計算し、これらが位相次元より大きくなることを証明する。また、部分列の取り方によっては2次元の空間充填曲線空間が得られることを示す。さらにパターンを構成するセルの個数の時間発展に伴う変化に注目すると、ルベグ特異関数で表されることを発見した。

# 学位論文審査の要旨

主査	教授	由利	美智子
副査	教授	津田	一郎
副査	准教授	行木	孝夫
副査	准教授	荒井	迅

学位論文題名

## Ulam's cellular automaton and Rule 150

(ウラムのセル・オートマトンとルール 150)

博士学位論文審査等の結果について (報告)

著者は学位論文において、2次元格子上の非線型な局所規則により定義された 結晶成長モデル Ulam's cellular automaton に対し、離散力学系の範疇で定式化された 位相的 エントロピー の性質を明らかにし、更にセル・オートマトンから偏微分方程式を構成する 逆超離散化 という手続きにより、Ulam's cellular automaton が保持するフラクタル性を実現する 偏微分方程式を構成している。これらの発表結果は、応用上極めて興味深く学際的な観点からも高く評価できるものである。具体的には、Ulam's cellular automaton に関する位相的エントロピーの発散を、1次元セル・オートマトンである Rule 150 と位相共役な部分力学系の存在を示す事により証明している。Rule 150は、局所規則が線型でありながらも位相的エントロピーが正となり、カオス的である事が知られている。一方、2次元セル・オートマトンに関しては、数学的に解析が可能な具体例に乏しく、理論的枠組みの構築が待たれている状況にある。又、逆超離散化の問題に関しても、セル・オートマトンから構成可能な偏微分方程式が一意に定まらないと言う困難があり、セル・オートマトンの自己相似性を再生させる偏微分方程式の導出に関しては 極めて成功例 が少ない。このような状況下で、著者が Ulam's cellular automaton 及び Rule 150 両者に対し個々に、逆超離散化によりフラクタル性を保存する偏微分方程式を数値的に構成した事は、高く評価されるべきである。又特筆すべきは、これらの結果を達成するプロセスにおいて、生態進化の数理モデルを偏微分方程式を介在して解析した場合に起こりえる、本質的な問題を明らかにし数学分野の枠を超え大変将来性のある問題を提起している点である。以上の理由により、著者は北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格があるものと認められる。