博士（理学）　永　井　隆　之

学 位 論 文 題 名

THE GEOMETRY OF HYPERSURFACES IN EUCLIDEAN SPHERE

（ユークリッド球面内の超曲面の幾何学）

学位論文内容の要旨

本論文ではルジャンドル特異点論の応用として、n 次元ユークリッド球面内の超曲面の幾何学的性質について研究した。

第Ⅰ部では、n 次元ユークリッド球面内の超曲面のガウス写像について研究した。泉屋は特異点論的観点からの擬球の部分多様体の外在的微分幾何学を研究する上で基礎的な道具として使われる、ミンコフスキー空間の擬球におけるルジャンドル双対性の定理を示した。本論文では同様の手法をn次元ユークリッド球面内の超曲面のガウス写像の研究に適用した。

超曲面とガウス写像の対は、超曲面の定義域から、よく知られた球面的ルジャンドル双対性を与えるn次元球面の積空間内の接触多様体(Δ,K)へのルジャンドルはめ込みになっている。これはガウス写像の像が、このルジャンドルはめ込みの波面だと解釈できる事を意味している。

まず、n 次元球面内の超曲面におけるガウス写像、型作用素、ガウスークロネッカー曲率を定義した。次に接触多様体(Δ,K)とルジャンドルはめ込みLを導入し、ガウス写像の像がこのルジャンドルはめ込みLの波面と解釈できることを見た。

次に、球面上の超曲面における高さ関数族を定義し、この族の芽が超曲面の各点でモース族になっている事、そして上で導入したルジャンドルはめ込みLの母関数族となっている事を示した。

そして、ルジャンドル特異点論を適用する事により、ガウス写像の特異点の幾何学的意味を、Montaldi による超曲面の接触型の理論を用いて研究し、更に 6 次元以下においては生成的な性質についても研究した。また、3次元球面の generic な特異点の分類とその性質についての研究には宮脇の結果があるが、その結果も紹介した。

第Ⅱ部では、3次元球面内の大円織面と呼ばれる特別な曲面のクラスについて研究した。大円織面とは、3次元球面の大円の1パラメータ族から得られる曲面を言う。

第Ⅰ部において球面内の超曲面に、外在的ガウス曲率 K_e と、内在的曲率 K_I という、2種類の曲率が定義された。ここで、内在的ガウス曲率は、曲面の誘導計量から定義されるガウス曲率である。二つの曲率の間には、 $K_e = K_I - 1$ という関係がある。ここでは 外在的ガウス曲率 K_e が0の曲面は、少なくとも局所的には、ある大円織面としてパラメータ付けられることがわかる。そのような曲面を外的平坦大円織面と呼ぶ。こうして外在的曲率が0の曲面を特徴づけられる事が、大円織面を研究した動機である。

ユークリッド空間では。ガウス曲率0の曲面は線織面（ガウス曲率が0以下の曲面）の特別なクラスである可展面であった。よって、大円織面の概念は、線織面の3次元球面における類似である。本論文では、大円織面の幾何学的特徴と特異点について研究した。

但し、3次元球面には射影空間への二重被覆　$\pi : S^3 \longrightarrow RP^3$ が存在し、大円は射影空間 RP^3 の射影直線と一致するので、大円織面の特異点は線織面の特異点と同じものになるが、本論文では、大円織面の特異点を、球面の幾何学の観点、つまり SO(4)不変な幾何学という観点から研究した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 泉 屋 周 一
副 査 教 授 石 川 剛 郎
副 査 准教授 大 本 亨
副 査 准教授 古 畑 仁

学 位 論 文 題 名

THE GEOMETRY OF HYPERSURFACES IN EUCLIDEAN SPHERE

(ユークリッド球面内の超曲面の幾何学)

当論文において、申請者は、ユークリッド空間のn次元球面内にある超曲面の微分幾何学的性質について、ルジャンドル特異点論を応用して研究している。当論文は2つの主要部分からなる。

第一部では、n次元球面内の超曲面に対するガウス写像を考察している。与えられた超曲面とそのガウス写像の対はn次元球面の積空間への写像となるが、その中に自然に定まる接触多様体へのルジャンドル埋め込みとなる。ガウス写像の像はそのルジャンドル埋め込みの波面集合となり、その特異点はルジャンドル特異点となる。このようにして、ルジャンドル特異点論をガウス写像の特異点の研究に応用することが出来る。申請者は、超曲面の高さ関数が、上記のルジャンドル埋め込みに対応する母関数族となることを示し、ルジャンドル特異点論の基本定理を応用することにより、超曲面と大超球面との接触を記述する定理を得た。大超球面はガウス写像が定値写像である場合に対応しており、ユークリッド空間内の平面に対応するモデル超曲面と考えられる。申請者による、この研究から、ガウス写像の特異点の退化状況が如何に与えられた超曲面がモデル超曲面に局所的に近いかを表すものであることが明らかになった。また、低次元の場合の以前から存在する宮脇によるガウス写像の特異点の分類結果の幾何学的意味を明確にした。

第二部では、3次元球面内でガウス写像が定値またはその像が曲線となる特別な曲面に現れる特異点の分類を与えた。ガウス写像の微分を考えることにより、曲面のガウス・クロネッカー曲率が定義されるが、この場合はガウス・クロネッカー曲率が零の場合、言い換えると外在的平坦な曲面を考えている。申請者はそのような曲面は大円織面と呼ばれる大円を1径数で動かした3次元球面内の曲面であることを示し、それらが、直交群のリー環内の不変量で表現されることを示した。その結果、大円織面の作る空間が定まり、さらにその中の外在的平坦な曲面の作る空間を記述できる。その空間において「トムの横断性定理」と「佐治による波面に現れる特異点の同定理論」を応用することにより、生成的な特異点の分類を完成させている。また、特異点の分類表での対応が第一部で記述した双対性によって理解できることを示している。

このように、本論文は、n次元球面内の超曲面とガウス写像の双対性、そこに現れる特異点の性質、分類に新たな知見を与えたものである。

よって著者は北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認められる。