博　士（情報科学）　出　江　幸　重

学位論文題名

二次元勾配的Morse-Smale 力学系の散逸境界の数値的算定

学位論文内容の要旨

本学位論文は、二次元勾配的 Morse-Smale 力学系の散逸境界および散逸境界族を算定する系統的なアルゴリズムを明らかにするものである。

力学系の Lyapunov 関数を構成する方法の研究は長い歴史をもち、数値計算技術の発展とともに様々な観点から検討されてきた。これまでに、Lyapunov 関数の存在が保証されている力学系に対して、その関数を構成する方法は数多く研究されてきた。しかし、いずれの方法においても、その Lyapunov 関数を実際に構成することが困難な場合が存在しており、現状では万能なアルゴリズムは存在していない。一方、位相幾何学的な力学系理論の観点から、Lyapunov 関数の存在が保証されていない系を含めて、その内部構造を明らかにするための一連のアルゴリズムを提案する研究が進められている。しかし、これらの研究では力学系の Conley 指数とよばれる位相幾何学的な特性を明らかにすることを主目的としており、Lyapunov 関数の構成を念頭においているわけではない。Lyapunov の漸近安定定理における Lyapunov 関数と Conley の基礎定理における Lyapunov 関数では意味が異なる。一般的に知られている Lyapunov の漸近安定定理は平衡点の漸近安定性の十分条件を与える。すなわち、その平衡点の漸近安定性を示すためには、実際にその関数を構成しなければならない。一方、本研究の Conley の基礎定理における Lyapunov 関数も力学系が勾配的であることを判定するために実際に構成すべき関数である。

本研究では力学系理論の視点から、それが大域コンパクトアトラクタをもつような任意の勾配的 Morse-Smale 力学系に対して、その Conley の意味の Lyapunov 関数を構成するための有効な方法を見出すことを最終目的としている。検討の対象とする力学系は複数の特異点をもつことを許して考察を進める。本研究では、つぎの一連の手順によって Lyapunov 関数を構成することを試みる (Lyapunov 関数の等位集合の境界を単に散逸境界と呼び、その境界上に交点を持つ場合を特異散逸境界、持たない場合を正則散逸境界と呼ぶ)。

(1)　散逸境界の数値データを求める。

(2)　散逸境界の族の数値データを求める。

(3)　算定した数値データを援用して、モデル式から Lyapunov 関数を決定する。

本論文ではこの (1) および (2) を議論し、力学系理論の視点からの検討を行う。(3) については、今後の継続課題である。

本論文の構成は次の通りである。第 1 章では研究の意義や目的、必要性、歴史的背景を述べるとともに、Lyapunov の漸近安定定理における Lyapunov 関数と Conley の基礎定理における Lyapunov 関数が異なることを説明する。第 2 章では、本論文で使用する記号や用語を簡潔に説明する。本研究に対する必要不可欠な背景説明として、位相幾何学的な力学系理論において Conley の意味における Lyapunov 関数がどのように理解されているかを述べる。また、勾配的 Morse-Smale 力学系

について説明する。第 3 章では、チューブの概念を精密に再定義する。また、容易に定めることのできる境界を初期値とし、チューブを用いてその境界を変形することにより散逸境界を算定するアルゴリズムを提案する。その際、数値計算例を用いて提案したアルゴリズムの有効性を確認する。第 4 章では、全特異散逸境界 (すべてのサドル点を境界上に持つ特異散逸境界) を算定するアルゴリズムを示す。また、剛体振子系を用いた数値計算例題に対して、提案されたアルゴリズムを適用し有効性を確認する。第 5 章では、二次元勾配的 Morse-Smale 力学系の Conley の意味における Lyapunov 関数の等高線の全体像 (散逸境界族の数値データ) を明らかにするアルゴリズムを提案する。散逸境界族を求めることは、1 つのサドル点のみを境界上に持つ 1-特異散逸境界の族を求めることに帰着することを述べ、1-特異散逸境界族を算定するアルゴリズムを示す。また、第 4 章の数値例で用いた剛体振子系に対する 1-特異散逸境界族を数値的に算定することでアルゴリズムの有効性を示す。第 6 章では本論文のまとめを行い、今後の展望についても述べる。

以上をまとめると、本学位論文では位相幾何学的な手法を用いて二次元勾配的 Morse-Smale 力学系の散逸境界および散逸境界族を算定するひとつの系統的なアルゴリズムを明らかにした。本手法を用いて構成した散逸境界族から Lyapunov 関数を求めることができれば、その関数を用いて制御系設計への応用や力学系の遷移構造解析への応用が期待できる。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　山　下　　　裕
副　査　　教　授　　五十嵐　　　一
副　査　　教　授　　小野里　雅　彦

学 位 論 文 題 名

二次元勾配的Morse-Smale 力学系の散逸境界の数値的算定

本学位論文は、二次元勾配的 Morse-Smale 力学系の散逸境界および散逸境界族を算定する系統的なアルゴリズムを明らかにするものである。

力学系の Lyapunov 関数を構成する方法の研究は長い歴史をもち、数値計算技術の発展とともに様々な観点から検討されてきた。これまでに、Lyapunov 関数の存在が保証されている力学系に対して、その関数を構成する方法は数多く研究されてきた。しかし、いずれの方法においても、その Lyapunov 関数を実際に構成することが困難な場合が存在しており、現状では万能なアルゴリズムは存在していない。一方、位相幾何学的な力学系理論の観点から、Lyapunov 関数の存在が保証されていない系を含めて、その内部構造を明らかにするための一連のアルゴリズムを提案する研究が進められている。しかし、これらの研究では力学系の Conley 指数とよばれる位相幾何学的な特性を明らかにすることを主目的としており、Lyapunov 関数の構成を念頭においているわけではない。Lyapunov の漸近安定定理における Lyapunov 関数と Conley の基礎定理における Lyapunov 関数では意味が異なる。一般的に知られている Lyapunov の漸近安定定理は平衡点の漸近安定性の十分条件を与える。すなわち、その平衡点の漸近安定性を示すためには、実際にその関数を構成しなければならない。一方、本研究の Conley の基礎定理における Lyapunov 関数も力学系が勾配的であることを判定するために実際に構成すべき関数である。

本研究では力学系理論の視点から、それが大域コンパクトアトラクタをもつような任意の勾配的 Morse-Smale 力学系に対して、その Conley の意味の Lyapunov 関数を構成するための有効な方法を見出すことを最終目的としている。検討の対象とする力学系は複数の特異点をもつことを許して考察されている。本研究では、つぎの一連の手順によって Lyapunov 関数を構成することを試みている。

(1) 散逸境界の数値データを求める。

(2) 散逸境界の族の数値データを求める。

(3) 算定した数値データを援用して、モデル式から Lyapunov 関数を決定する。

本学位論文ではこの (1) および (2) を議論し、力学系理論の視点からの検討を行っている。(3) については、今後の継続課題であるとしている。

本論文の構成は次の通りである。第 1 章では研究の意義や目的、必要性、歴史的背景を述べるとともに、Lyapunov の漸近安定定理における Lyapunov 関数と Conley の基礎定理における Lyapunov

関数が異なることを説明している。また、位相幾何学的な力学系理論において Conley の意味における Lyapunov 関数がどのように理解されているかが述べられ、勾配的 Morse-Smale 力学系についても説明されている。第 2 章では、チューブの概念を再定義し、容易に定めることのできる境界を初期値とし、チューブを用いてその境界を変形することにより散逸境界を算定するアルゴリズムを提案している。その際、数値計算例にて提案されているアルゴリズムの有効性を確認している。第 3 章では、全特異散逸境界 (すべてのサドル点を境界上に持つ特異散逸境界) を算定するアルゴリズムが示されている。また、剛体振子系を用いた数値計算例題に対して、提案されたアルゴリズムを適用し有効性が示されている。第 4 章では、二次元勾配的 Morse-Smale 力学系の Conley の意味における Lyapunov 関数の等高線の全体像 (散逸境界族の数値データ) を明らかにするアルゴリズムが提案されている。散逸境界族を求めることは、1 つのサドル点のみを境界上に持つ 1-特異散逸境界の族を求めることに帰着することが述べられ、1-特異散逸境界族を算定するアルゴリズムが示されている。また、第 4 章の数値例で用いた剛体振子系に対する 1-特異散逸境界族が数値的に算定されておりアルゴリズムの有効性が示されている。第 5 章では本論文のまとめと今後の展望について述べられている。

以上をまとめると、本学位論文では位相幾何学的な手法により二次元勾配的 Morse-Smale 力学系の散逸境界および散逸境界族を算定するひとつの系統的なアルゴリズムが提案されており、制御系設計への応用や力学系の遷移構造解析への応用が期待できる。したがって、本学位論文は制御理論や制御技術の発展に寄与するところ大であり、博士 (情報科学) の学位を授与するに値するものと認める。