

学位論文題名

Testable and Untestable Classes of First-Order Logic

(一階述語論理の検査可能・不可能なサブクラスについて)

学位論文内容の要旨

近年は大規模なデータセットが増え、情報爆発の時代であると言われている。ある種のデータセットでは、その正確なサイズが不明であり、全てのデータを一瞥することすら困難なほど巨大である。例えば、インターネットはそのサイズが刻々と変化しており、また、様々なサーバに分散されている全ての情報にアクセスすることは現実的ではない。このような情報爆発に対応するため、新しいアルゴリズムや手法が必要になってきている。

入力データ長に対してその線形時間がなければほとんど何も計算できないと考えられがちだが、実際には定数時間だけでも計算できるものが多数ある。その一つがプロパティ検査である。プロパティ検査とは、大規模なグラフやデータベースからランダムサンプリングを行い、そのごく僅かなサンプルを元に、確率的な近似アルゴリズムを用いて高速に結論を出力するタイプの検査手法である。プロパティ検査によって、NP 完全問題の一部も検査可能であると知られている。Lovász(Lovász. Proc. ALT 2008, LNCS 5254, p. 3, 2008) がいうように、プロパティ検査は帰納法の応用であると考えられる。

プロパティ検査は、形式的検証の分野において、計算量の高い検証を行う前の高速なフィルターとして提案された。形式的検証では、ユーザーが何かしら形式論理等の形式言語で目的のプロパティを定義し、コンピュータはシステムがそれを満たしているかどうかを計算する。このように形式言語で定義されるプロパティの検査は自然な課題である。また、大規模な関係データベースへの応用も考えられる。その場合は、ユーザーが SQL 等でクエリーを書いてコンピュータが自動的に効率の良い確率的な近似を行えることが望ましい。SQL は一階述語論理の拡張に近いこと (Libkin. Theor. Comput. Sci., 296(3):379-404, 2003) や、形式的検証も形式論理でプロパティを定義することからも、論理式の検査が重要になる。

本研究では、一階述語論理のプロパティ検査について研究する。一階述語論理で定義できるプロパティには検査可能と検査不可能なものが存在する。したがって、検査できるサブクラスとできないサブクラスにプロパティを分類することが目的である。この課題は、Alon ら (Alon, Fischer, Krivelevich, Szegedy. Combinatorica, 20(4):451-476, 2000) が初めて研究を行い、一階述語論理を二つのクラスに分け、その一方は検査可能であり他方が検査不可能であると証明している。しかしながら、その結果はループなしの無向グラフに限っている。Alon らの結果は深くて影響力もあるが、一階述語論理をより細かく分類するとより良い結果を導くことが可能である。

本研究の目的は、一階述語論理について、検査可能および検査不可能な文法的サブクラス、(Börger ら (Börger, Grädel, Gurevich. The Classical Decision Problem. Springer-Verlag, 1997.) のように定義するもの) の完全な分類を行うことである。本研究の成果はゲーデルクラスを除けば完全な分類になっている。本研究の主な成果は、以下の通りである。

(1) グラフプロパティ検査やハイパーグラフプロパティ検査の拡張である関係プロパティ検査を提案している。また、従来のモデルとの関係を明らかにし、いくつかのバリエーションも提案している。さらに、それぞれのバリエーションの差を明らかにし、関係プロパティ検査を元にしたプロパティ検査の分類問題の定義を行っている。

(2) 関係プロパティ検査において、いくつかの基本的な成果を証明している。本研究では、この基本的な成果を何回も応用しているため、まとめて証明している。

(3) Alon ら (Alon et al., 2000, Ibid.) が検査可能だと証明しているクラスを、ループなしの無向グラフから関係ストラクチャーへ拡張し、ラムゼイクラスという一階述語論理の古典的に有名なサブクラスが全て検査可能であることを証明している。検査可能とはバリエーションによらないで、どれを使っても検査可能である。この成果は Austin と Tao (Austin, Tao. *Random Struct. Alg.*, 36(4):373-463, 2010) が証明しているハイパーグラフ理論の複雑な成果を応用している。

(4) 等号ありのアッカーマンクラスという一階述語論理の古典的に有名なサブクラスが全て検査可能であることを証明している。こちらの証明はモデル理論の議論からできている。

(5) Alon ら (Alon et al., 2000, Ibid.) が検査不可能だと証明しているクラスのより強い成果を証明している。Alon らの証明では、量子子が 17 個あれば (パターンによって) 検査不可能なプロパティを定義できることが示されている。本研究の成果では、Alon らと同じパターン 4 個でも足りることを証明している。この証明は、Alon らが証明しているグラフ理論の定理を応用している。

(6) Kahr-Moore-Wang クラスという一階述語論理の古典的に有名なサブクラスが検査不可能だと証明している。これは検査不可能性として最小クラスの一つである。この成果から、量子子が 3 個あるとこのパターンで検査不可能なプロパティを表すことができると分かる。量子子が 2 個以下だと上記の成果から検査可能だと分かるため、検査不可能なプロパティを一階述語論理で定義するには量子子の必要十分な数は 3 であると分かる。この証明は、Alon ら (Alon, Blais. *Proc. APPROX 2010 and RANDOM 2010*, LNCS 6302, pp. 394-405, 2010) が示した、ブール関数の同型問題が検査不可能であることを証明するためのアイデアを応用している。

(7) 等号なしの Kahr-Moore-Wang クラスは、検査不可能なプロパティを含むことを証明している。ただし、この成果においては、関係プロパティ検査のバリエーションに限る。すなわち、普段のバリエーションでは検査不可能だが、違うバリエーションでは検査可能かどうかは未だ証明していない。

形式的検証等への応用を考えると、ユーザーが定義するプロパティを自動的に検査するために、コンピュータが与えられた論理式から検査アルゴリズムを自動的に作成することが必要である。本研究で検査可能であると証明しているクラスについては、検査アルゴリズムを論理式から作る方法も同時に提案している。したがって、ユーザが与えた論理式から、自動的に定数時間の確率的近似を行うシステムを構築することが可能である。なお、本研究において、上記の成果を得るために、形式論理とモデル理論、グラフとハイパーグラフ理論、ブール関数の理論等の最新の成果を援用している。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 ZeugmannThomas
副 査 教 授 有 村 博 紀
副 査 教 授 湊 真 一

学位論文題名

Testable and Untestable Classes of First-Order Logic

(一階述語論理の検査可能・不可能なサブクラスについて)

本学位論文では、理論計算機科学の副分野であるプロパティ検査におけるさまざまな重要な問題について研究している。プロパティ検査 (property testing) とは 20 年前から注目されている分野であり、定数時間での確率的近似検査によって特徴づけられる計算問題を考察する。検査したいプロパティは形式論理 (logic) で定義することができる。とくに興味深い問題として、一階述語論理の構文的な部分クラス (syntactic subclasses of first-order logic) で定義可能なプロパティの検査が注目されている。これに対して、2000 年の Alon と、Fischer, Krivelevich, Szegedy らの論文 (以下、Alon らと呼ぶ) は、ループなしの無向グラフのクラスに対して、量子子のパターンが $\exists^* \forall^*$ であるような一階述語論理式で定義できるプロパティは全て検査可能であることを示した。さらに彼らは、同じクラスに対して、量子子のパターンが $\forall^* \exists^*$ であり検査可能でないプロパティを与えている。

上記の結果から出発し、著者は検査可能なプロパティと検査不可能なプロパティの完全な論理的分類を与えることを目指している。第 2 章では、この目標を達成するために、関係プロパティ検査の枠組みを提案している。これは、一階述語論理に基づいており、最近、さまざまな文献で考察されている非一様なハイパーグラフ検査に関する結果に対応する種々の場合を含む一般的な枠組みである。特筆すべき点として、この一般的な枠組みから構造間の距離を与える三つの測度が自然に導かれる。

第三章では、著者は、以降の章で必要になる基本的な一連の結果を証明している。特に、第二章で提案している三つのモデルを比較し、それらの真の階層を証明している。次に、Alon らが提案している区別不可能性を無向グラフから関係構造へ拡張し、さらに、有名な Yao の原理を後で必要な形で示す。

第四章と第五章では主結果を与えている。第四章では、一階述語論理の二つの有名な部分クラスが、第二章の全てのモデルに関して検査可能であることを証明している。第一の結果は、等号ありのアッカーマンのクラスに関するものであり、完全に新しい成果である。第二の結果は、ラムゼイのクラスに関するものであり、著者は同じクラスに対する Alon らの結果を、無向グラフから関係ストラクチャーへと拡張している。その証明では、Austin と Tao (2010) による最新の結果を巧妙なやり方で適用して、結果を得ている。

第五章では検査不可能なプロパティについて議論している。Alon らの論文では 17 個の量子子からなるパターン (12 個の全称記号に 5 個の存在記号がつづくもの) で定義されるプロパティで、検査不可能なものが定義できることを証明している。第五章において、著者はこの結果をさらに詳

細化し、ほとんど完全な分類を得ている。特に、検査不可能なプロパティである、等号ありで量子子のパターンが $V^3\exists$ であるものと、等号ありで量子子のパターンが $V\exists V$ であるものの存在を、本学位論文で扱う全てのモデルにおいて示している。さらに、等号無しの場合には、量子子のパターンが $V\exists V$ であるクラスのプロパティである、少なくとも一つのモデルで検査不可能なものを定義できることを証明している。

著者は、専門分野と関連分野に関する深い知識を持ち、学位論文ではプロパティ検査分野において基本的かつ重要な新しい成果をあげている。多くの著名な研究者がこの分野に参加しており、理論情報科学において最も活発な分野の一つである。著者は、その能力と想像力を生かして、深い研究課題を自分で策定し、関連文献と研究等を引用しながら、新しい道具や手法を開発し、その課題を解くことに成功している。とくに、第四章と五章の結果は、学術的に困難な課題を解決しており、重要な結果をあげているといえる。

これを要するに、著者は、関係プロパティ検査におけるプロパティの検査可能性と不可能性について、新しい理論的枠組みを提案し、種々のプロパティのクラスに対して、それらの検査可能性と不可能性を明らかにするという新知見を得たものであり、理論情報科学において、貢献するところ大なるものがある。よって著者は、北海道大学博士(情報科学)の学位を授与される資格あるものと認める。