

学位論文題名

複雑ネットワークのフラクタル性と構造的及び
動的クロスオーバー

学位論文内容の要旨

近年、数学、物理学、化学、生物学、経済学、社会学、コンピュータ科学など様々な学問分野において急速に関心が高まっているトピックスの一つにネットワーク科学がある。インターネット、道路や航空路線等の交通網、脳内のニューロンのつながりなど、身の回りにはネットワークが遍在している。ネットワークという概念の一般性ゆえ、複雑ネットワークの普遍的性質の解明は自然界や社会における複雑さの中に潜む統一的な法則性を理解する手掛かりを与える。最近のコンピュータ技術の急速な発展によって、大規模なネットワークの数値解析が可能となり、実在するネットワークが有する様々な統計的性質が解明されるようになってきている。その結果、多くの複雑ネットワークがスモールワールド性、スケールフリー性、およびフラクタル性と呼ばれる共通する性質を有することが明らかになった。特に、数学的に相入れないと考えられるフラクタル性とスモールワールド性に関して、2005年に Song 等は、複雑ネットワークのフラクタル性の定義を変更することによって、スモールワールド性を有するスケールフリーなネットワークがフラクタル構造を取り得ることを明らかにした。この研究を契機に、複雑ネットワークのフラクタル性に関する研究が非常に活発化し、現在に至っている。しかしながら、フラクタル系にはその定義から特徴的長さが存在しないのに対して、スモールワールド性を示す系には系を特徴付けるスケールが必ず存在する。この観点から考えると、同一のネットワークにおいて特徴的な長さを有する性質と有しない性質が同時に見いだされると考えることは極めて不自然である。そのため、スモールワールド性とフラクタル性が実際にどのように共存するのか、両者の関係を明らかにするためのより詳細で系統的な研究が必要になる。しかし、現在に至るまでそのような研究は行われていない。

本論文は、現実のネットワークや複雑ネットワークの数理モデルの構造を系統的に調べ、スモールワールド性とフラクタル性の関係を明らかにすることを目的としている。研究の結果、スモールワールド性とフラクタル性が同一スケールで共存することはない事が明らかとなった。また、現実のネットワークの計測において両者が共存しているように見えるのは、スケールの違いにより構造的クロスオーバーが現れることに起因していることを解明した。さらに、そのクロスオーバーがネットワーク上のダイナミクスにどのような影響を与えるかを解明し、今後の複雑ネットワーク研究に対する指針を与えている。本論文は全8章で構成され、各章の概要は以下の通りである。

第1章は緒論であり、複雑ネットワークにおける構造的性質に関する研究の背景と問題点を概説する。特に、ネットワークの研究の流を概説した上で、本論文の目的について説明する。

第2章では、複雑ネットワークを特徴付ける様々な量についての説明を行う。ネットワークの種類や数学的記述方法、さらには次数やクラスター性、ノード間距離といった特徴量が説明される。また、ネットワーク・モデルの基本となるランダム・グラフの定義と性質について論ずる。

第3章では、本論文で扱う3つの複雑ネットワークの基本性質のうち、スモールワールド性とスケールフリー性について説明する。それらの性質を持つネットワーク・モデルを紹介し、これらの

性質がどのようなメカニズムによって生じるのかについて説明する。

第4章では、ユークリッド系でのフラクタル性について説明したのち、クラスター成長法とボックス・カバーリング法に基づく複雑ネットワークのフラクタル性について説明を行う。また、スケールフリー性を有するフラクタル・ネットワークの数理モデルをいくつか紹介し、具体的なフラクタル解析のアルゴリズムに関して解説する。本章の最後に、現実のネットワークにおいてスモールワールド性とフラクタル性が共存しているように見える観測事実について言及し、計測方法の違いによってこの事実を説明することの問題点を指摘した上で、再度本研究の目的を述べる。

第5章では、幾つかの現実のネットワークとネットワーク・モデルに対し、クラスター成長法とボックス・カバーリング法に基づく系統的なフラクタル解析を行う。その結果、スケールフリー性を有するネットワークであっても、一方の定義でフラクタル(スモールワールド)なネットワークは、もう一方の定義でもフラクタル(スモールワールド)であることが判明した。このことから、いかなる意味においてもフラクタル性とスモールワールド性は同一スケールにおいて共存しないことが明らかとなった。

第6章では、第5章で明らかとなった知見とスモールワールド性とフラクタル性の共存を示唆する観測事実の矛盾を解消するため、二つの構造的特徴(スモールワールド性とフラクタル性)がスケールの違いによってクロスオーバーする描像を提唱した。この考え方をより明確にするために、パーコレーション転移点近傍のネットワーク構造を詳細に調べた。その結果、相関長という系を特徴づける唯一の長さより短いスケールにおいて系はフラクタル性を示し、相関長よりも長いスケールではスモールワールド性を示すことが明らかとなった。また、スケールの違いによるこのような構造的クロスオーバーは、フラクタル性の定義に依存せず観測されることが判明した。さらに、この構造的クロスオーバーの振る舞いは、相関長を唯一の特徴的長さとするスケーリング理論により説明できることも明らかとなった。

第7章では、ネットワークの構造的クロスオーバーが、系のダイナミクスにどのような影響を与えるかについて考察した。具体的には、パーコレーション転移点近傍におけるネットワーク上の拡散現象の自己回帰確率をマスター方程式を数値的に解くことで求め、その振舞いを解析した。計算された自己回帰確率の時間依存性から、拡散には特徴的時間が存在し、異常拡散から引き延ばされた指数関数型の拡散へとクロスオーバーすることが明らかになった。このような動的クロスオーバーは、フラクタル性からスモールワールド性への構造的クロスオーバーに対応するものであり、クロスオーバーの様子は相関長の範囲まで拡散が広がる時間を唯一の特徴的時間とするスケーリング理論によって説明されることが明らかになった。また、通常のフラクタル系の異常拡散を特徴づけるスケーリング関係式が、スケールフリー性を有するフラクタル・ネットワークにおいても成立することを、解析的および数値的に明らかにした。

第8章は結論である。複雑ネットワークのフラクタル性とスモールワールド性の関係、フラクタル構造からスモールワールド構造への構造的クロスオーバー、および拡散現象における動的なクロスオーバーに関して本研究から得られた知見をまとめる。また、本研究で得られた結論が複雑系一般の理解にどのような意味を持つことになるかについても言及する。

学位論文審査の要旨

主査	教授	矢久保	考介
副査	教授	丹田	聡
副査	教授	郷原	一寿
副査	准教授	根本	幸児(理学研究院 物理学部門)

学位論文題名

複雑ネットワークのフラクタル性と構造的及び 動的クロスオーバー

近年、数学、物理学、化学、生物学、経済学、社会学、コンピュータ科学など様々な学問分野において急速に関心が高まっているトピックスの一つにネットワーク科学がある。ネットワークという概念の一般性ゆえ、複雑ネットワークの普遍的性質の解明は自然界や社会における複雑さの中に潜む統一的な法則性を理解する手掛かりを与える。複雑ネットワークに対する最近の精力的な研究の結果、多くの複雑ネットワークがスモールワールド性、スケールフリー性、およびフラクタル性と呼ばれる共通する性質を有することが明らかになった。特に、数学的に相入れないと考えられるフラクタル性とスモールワールド性に関して、2005年に Song 等は、複雑ネットワークのフラクタル性の定義を変更することによって、スモールワールド性を有するスケールフリーなネットワークがフラクタル構造を取り得ることを明らかにした。しかしながら、フラクタル系にはその定義から特徴的長さが存在しないのに対して、スモールワールド性を示す系には系を特徴付けるスケールが必ず存在する。この観点から考えると、同一のネットワークにおいて特徴的な長さを有する性質と有しない性質が同時に見いだされると考えることは極めて不自然である。そのため、スモールワールド性とフラクタル性が実際にどのように共存するのか、両者の関係を明らかにするためのより詳細で系統的な研究が必要になる。しかし、現在に至るまでそのような研究は行われていない。

本論文で申請者は、現実のネットワークや複雑ネットワークの数理モデルの構造を系統的に調べ、スモールワールド性とフラクタル性の関係を明らかにした。また、現実のネットワークの計測において両者が共存しているように見えるのは、スケールの違いにより構造的クロスオーバーが現れることに起因していることを解明した。さらに、そのクロスオーバーがネットワーク上のダイナミクスにどのような影響を与えるかを解明し、今後の複雑ネットワーク研究に対する指針を与えている。

本研究の結果、以下のことが明らかとなった。(1) スモールワールド性とフラクタル性が同一スケールで共存することはない。(2) これら二つの構造的特徴は、異なるスケールにおいては共存し得る。(3) パーコレーション転移点近傍における構造的クロスオーバーは相関長によってスケールされる。(5) 構造的クロスオーバーは拡散現象において動的クロスオーバーとなって現れる。(6) 動的クロスオーバーは相関時間のみにによってスケールされる。

本論文は全 8 章で構成され、各章の概要は以下の通りである。第 1 章は緒論であり、複雑ネットワークの構造的性質に関する研究の背景と問題点を概説している。第 2 章では、複雑ネットワーク

を特徴付ける様々な量についての説明を行っている。第3章では、本論文で扱う3つの複雑ネットワークの基本性質のうち、スモールワールド性とスケールフリー性について説明している。第4章では、ユークリッド系でのフラクタル性について説明したのち、クラスター成長法とボックス・カバーリング法に基づく複雑ネットワークのフラクタル性について説明を行っている。第5章では、幾つかの現実のネットワークとネットワーク・モデルに対し、クラスター成長法とボックス・カバーリング法に基づく系統的なフラクタル解析を行っている。第6章では、第5章で明らかとなった知見とスモールワールド性とフラクタル性の共存を示唆する観測事実の矛盾を解消するため、二つの構造的特徴(スモールワールド性とフラクタル性)がスケールの違いによってクロスオーバーする描像を提唱している。この考え方をより明確にするために、パーコレーション転移点近傍のネットワーク構造を詳細に調べている。第7章では、ネットワークの構造的クロスオーバーが、系のダイナミクスにどのような影響を与えるかについて考察している。具体的には、パーコレーション転移点近傍におけるネットワーク上の拡散現象の自己回帰確率をマスター方程式を数値的に解くことで求め、その振舞いを解析している。第8章は結論であり、複雑ネットワークのフラクタル性とスモールワールド性の関係、フラクタル構造からスモールワールド構造への構造的クロスオーバー、および拡散現象における動的なクロスオーバーに関して本研究から得られた知見をまとめている。

これを要するに著者は、多くの複雑ネットワークが示す二つの基本的性質、すなわちフラクタル性とスモールワールド性の関係を解明し、スケールの相違による構造的クロスオーバー、さらにはダイナミクスにおける動的クロスオーバーの可能性を理論的に示した。これらの研究の成果は、複雑ネットワークに対する新知見を与えるのみならず、ネットワークの新奇機能の創出やデザインに対して重要な役割を果たすものであり、応用物理学に対して貢献するところ大なるものがある。

よって、著者は、北海道大学博士(工学)の学位を授与される資格あるものと認める。