

学位論文題名

Study on Infinite Dimensional Lie Groups by
Unbounded Operator Theoretic Approach

(非有界作用素論による無限次元リー群の研究)

学位論文内容の要旨

概要

本博士論文では、非有界作用素論と von Neumann 代数の理論を用いて、無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体の成す位相群 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ の適当な閉部分群たちが Lie 代数を持つことを示す。ここで、ユニタリ群 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ には強作用素位相を入れて位相群とみる。これはコンパクト Lie 群の一つの無限次元化である。良く知られているように、Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が無限次元の場合、そのユニタリ群 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ は Lie 代数を持たない。有限次元ユニタリ群の場合から素朴に類推すると、 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ の Lie 代数 $\text{Lie}(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ は強連続一径数ユニタリ群の生成子全体の空間になるべきである。一方でそのような生成子は一般に非有界な歪エルミート作用素 ($A^* = -A$ なる非有界作用素) になる。このような作用素たちには定義域の問題が生じ、一般に和や (Lie) 積が定義できない ($A+B$ の定義域が $\{0\}$ になることもある)。これが $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ が Lie 代数を持たない理由である。しかし、これは、その部分群に Lie 代数が定義できる可能性を排除するものではない。我々はそれを有限 von Neumann 代数のユニタリ群の場合に示した。主定理を述べる前に準備をする。

定義 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素 A が次の 2 条件を満たすとき、 A はレゾルベント族 $\mathcal{RC}(\mathcal{H})$ に属するという：

(RC.1) (一般には非有界な) 自己共役作用素 X と Y で、定義域の共通部分 $\text{dom}(X) \cap \text{dom}(Y)$ が X と Y の共通の芯になっているものが存在する。

(RC.2) $A = \overline{X + iY}$, $A^* = \overline{X - iY}$.

このとき、 X と Y は A に対して一意に定まるので、それを

$$\text{Re}(A) := X = \frac{1}{2}\overline{A + A^*}, \quad \text{Im}(A) := Y = \frac{1}{2i}\overline{A - A^*},$$

と書き、それぞれ実部、虚部という。

レゾルベント族の各元は、実部と虚部が自己共役作用素となるので、それぞれレゾルベントを考えることができる。

定義 レゾルベント族 $\mathcal{RC}(\mathcal{H})$ 上に、次の写像を連続にする最弱の位相を入れ、これを強レゾルベント位相という。

$$\mathcal{RC}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \{\text{Re}(A) - i\}^{-1} \in (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), SOT),$$

$$\mathcal{RC}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \{\text{Im}(A) - i\}^{-1} \in (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), SOT),$$

ここで、 SOT は強作用素位相を表す。

最後にこの論文の主定理を述べる。

定理 $\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に作用する有限 von Neumann 代数、 $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ に含まれるユニタリ作用素全体の成す位相群、 G をその閉部分群とする。このとき、集合 $\text{Lie}(G)$ を

$$\text{Lie}(G) := \left\{ A = -A^* : e^{tA} \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\},$$

と定めると, 任意の2元 $A, B \in \text{Lie}(G)$ に対し, $A+B$ 及び $AB-BA$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上稠密に定義された可閉作用素で, その閉包 $\overline{A+B}$, $\overline{AB-BA}$ は再び $\text{Lie}(G)$ の元となる. また, $\text{Lie}(G)$ 上に和, スカラー倍, Lie 積を

$$\text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G) \ni (A, B) \mapsto \overline{A+B} \in \text{Lie}(G), \quad \text{Lie}(G) \times \mathbb{R} \ni (A, \alpha) \mapsto \overline{\alpha A} \in \text{Lie}(G),$$

$$\text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G) \ni (A, B) \mapsto \overline{AB-BA} \in \text{Lie}(G),$$

と定めると, $\text{Lie}(G)$ はこれらの演算で実 Lie 代数となる. 更に $\text{Lie}(G)$ はレゾルベント族 $\mathcal{RC}(\mathcal{H})$ の部分集合であり, 強レゾルベント位相に関して完備位相実 Lie 代数となる.

論文ではいくつかの例を紹介し, このようなクラスが十分にたくさんあることを示す.

学位論文審査の要旨

主査	教授	新井朝雄
副査	教授	岸本晶孝
副査	准教授	戸松玲治

学位論文題名

Study on Infinite Dimensional Lie Groups by Unbounded Operator Theoretic Approach

(非有界作用素論による無限次元リー群の研究)

無限次元リー群に対するリー代数の存在に関する問題は、無限次元リー群論における古くて新しい根本的な問題の一つであり、ある意味では、まだ草創期的段階にあると言ってよい。このような状況において、この問題を無限次元リー群一般ではなく、やや狭い（それでも別の面から見れば十分広い）無限次元リー群の適切なクラスに関して、そのリー代数の存在問題について研究することは自然であり、実りある結果がもたらされることが予想される。本学位論文は、このような方向性のもとで、無限次元リー群として、無限次元ヒルベルト空間上の（強位相を入れた）ユニタリ群の閉部分群 G を考え、 G に対して、リー代数が存在するか否かという問題を考察したものであり、この問題に対して、ある肯定的な解答を与えたものである。

少し具体的に述べるならば次のようになる。ヒルベルト空間上の有限フォン・ノイマン環 M のユニタリ群の任意の強閉部分群 G に対して、 G の強連続 1 パラメータ部分群の生成子すべてからなる集合は、強レゾルVENT位相に関して、完備な無限次元位相リー代数を形成することが証明される。さらに M に付属する稠密に定義された閉作用素全体からなる代数に対して、テンソルカテゴリーの観点からの特徴づけが与えられる。

以上の結果は新しいものであり、独創的である。また、上述の根本的問題への一つの肯定的解答が示された意味においても、本論文の学術的価値は大きい。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。