

学位論文題名

Bases for the derivation modules of two-dimensional multi-Coxeter arrangements and universal derivations

(2次元多重コクセター配置の定める微分加群の基底、及び普遍導分)

学位論文内容の要旨

既約鏡映群 W の定めるコクセター配置 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(W)$ は、超平面配置の中でも特に重要なクラスである。G. M. Ziegler [12] によって導入された多重配置とは、超平面配置と、その上の重複度と呼ばれる非負整数値関数との対のことである。超平面配置がコクセター配置のとき、多重コクセター配置と呼ぶ。この場合、近年では、T. Abe [1] により、マイナスの値まで許す重複度も取り扱われ、本論文でもその概念を取り入れている。

多重コクセター配置の研究における、最も重要な結果は、Solomon-Terao [8] の結果をさらに推し進めた、H. Terao [9] による

“定数重複度をもつ多重コクセター配置は全て自由である”

という定理であろう。付随する微分加群の基底を具体的に構成するという形で、その自由性が示されているが、その時に重要な役割を果たすのが、K. Saito [7] による、原始微分 D であり、これによる共変微分 $\nabla_D: D(\mathcal{A}, -\infty)^W \xrightarrow{\sim} D(\mathcal{A}, -\infty)^W$ (Abe-Terao [2]) である。

さて、全く任意の多重コクセター配置の構造を調べる事は難しく、また殆ど不可能であろう。2次元の場合ですら、一般論から自由であることは知られているとはいえ、その冪指数や微分加群の基底の構成方法は知られていないのが実情である。不変式論や原始微分が適用できる範囲で、扱う重複度のクラスを広げるとき、各 W -軌道毎に一定値をとる重複度、すなわち W -同変重複度が自然に考えられる。本論文では、この W -同変重複度を持つ2次元多重コクセター配置の構造を調べている。具体的には、その微分加群の基底を構成している。構成法の基本的な考え方は、Abe-Yoshinaga [4] に準じている。その際、我々の目的のために、[4] での理論を平行して使えるよう、各重複度に対して、それに付随する普遍導分という概念を導入した。この述語は、M. Yoshinaga [11] に由来する。与えられた多重コクセター配置を、より簡単な重複度をもつ多重コクセター配置の構造と比較することが、[4] における基本的なアイデアであり、そのための道具が普遍導分である。

W -同変重複度に付随する普遍導分を見出す際に、コクセター配置 $\mathcal{A}$ が軌道分解を持つ場合(その時、軌道の個数は2である)、一つの W -軌道 $B \subseteq \mathcal{A}$ をコクセター配置と見なすことが我々の理論における基本的な考え方である。その原始微分 D_B の共変微分 ∇_{D_B} や、上記の ∇_D と組み合わせて、 W -同変重複度に付随する普遍導分を構成するのだが、本論文で扱う2次元の場合には、全ての場合を作ることができない。なぜなら D_B が W -不変でないからである。この事情から、Abe-Yoshinaga [4] の理論が使えないケース(本論文で、“exceptional case” と呼ぶ)が登場する。この例外ケースを除外せず、全ての場合に計算し、基底を構成するところに、本論文の特徴がある。なお、この場合の基底構成は、Solomon-Terao [8] における、2次元の場合の“double Coxeter”の基底の具体表示からそのアイデアを得た。

参考文献

- [1] T. ABE: A generalized logarithmic module and duality of Coxeter multiarrangements. arXiv:0807.2552v1.
- [2] T. ABE and H. TERAOKA: A primitive derivation and logarithmic differential forms of Coxeter arrangements. *Math. Z.* **264**, 2010, pp. 813-828.
- [3] T. ABE and H. TERAOKA: Primitive filtrations of the modules of invariant forms of Coxeter arrangements. arXiv:0910.2506v1.
- [4] T. ABE and M. YOSHINAGA: Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities. *J. Algebra* **322**, no. 8, 2009, pp. 2839-2847.
- [5] P. ORLIK and H. TERAOKA: *Arrangements of Hyperplanes*. Grundlehren der Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, 1992.
- [6] K. SAITO: On the uniformization of complements of discriminantal loci. In: *Conference Notes, Amer. Math. Soc. Summer Institute*, Williamstown, 1975.
- [7] K. SAITO: On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **29**, no. 4, 1993, pp. 535-579.
- [8] L. SOLOMON and H. TERAOKA: The double Coxeter arrangement. *Comment. Math. Helv.* **73**, 1998, pp. 237-258.
- [9] H. TERAOKA: Multiderivations of Coxeter arrangements. *Invent. Math.* **148**, no. 3, 2002, pp. 659-674.
- [10] H. TERAOKA: Bases of the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **133**, no. 7, 2005, pp. 2029-2034.
- [11] M. YOSHINAGA: The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **78**, no. 7, 2002, pp. 116-119.
- [12] G. M. ZIEGLER: Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. In: *Singularities*, Contemporary Math. **90**, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 345-359.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 寺 尾 宏 明

副 査 教 授 山 下 博

副 査 准教授 齋 藤 睦

学 位 論 文 題 名

Bases for the derivation modules of two-dimensional multi-Coxeter arrangements and universal derivations

(2次元多重コクセター配置の定める微分加群の基底、及び普遍導分)

コクセター群は対称群を一例として含む有限群の族であり、実鏡映群として実現される。また、リー群・リー環の分類と深く関わるワイル群をも含む重要なクラスをなしている。コクセター群を実鏡映群とみなすとき、その鏡映面の集合をコクセター配置と呼ぶ。コクセター群が対称群である場合は、対応するコクセター配置は、組み紐(braid)配置である。コクセター配置は、超平面配置の代表的例であって数多くの重要な結果がある。最初の重要な結果は、齋藤恭司による「コクセター配置は自由配置である」という定理(1976)であろう。この一般化として、「コクセター配置と定数重複度のなす多重配置は自由多重配置である」という結果(2002)があり、吉永正彦によるエーデルマン・ライナー予想の解決(2004)の鍵になった。吉永の証明においては、コクセター配置と定数重複度のなす自由多重配置の指数(exponents)の具体的決定が重要な役割を負った。すなわち、定数重複度の奇偶による場合分けが必要であって、

- コクセター配置の指数をコクセター数で何回かずらしたもの(定数重複度が奇数の場合)、
- コクセター数の倍数(定数重複度が偶数の場合)

が、コクセター配置と定数重複度のなす自由多重配置の指数になるのであった。

著者は、以上のような歴史的文脈の中で、2次元コクセター配置の場合に、より一層の一般化を成し遂げることに成功した。すなわち、著者は、定数重複度の条件を緩めて、同変重複度の場合を考察した。ここで、同変重複度とは、超平面配置のコクセター群による軌道分解を考え、各軌道の上では定数重複度になるような重複度を言う。本論文の主結果において、すべての2次元コクセター配置と同変重複度のなす多重配置の基底の具体的構成がなされ、指数が決定されている。一般に、コクセター群やワイル群などの具体的な群においては、一般論もさることながら、さまざまな代数的・あるいは幾何学的対象を具体的に求めることが重要である。しかし、定数重複度の場合ですら、原始微分の理論やホッジ・フィルトレーションなどの大道具を駆使することによって、コクセター配置と定数重複度のなす多重配置の基底の具体的構成と指数を求めることが初めて可能になったことを思い起こせば、2次元とは言え、より緩い条件の同変重複度においては、より大きな困難を伴うことが予想されるところであり、実際、その予想は正しかった。すなわち、特定の同変重複度の場合(例外型)には、原始微分の理論やホッジ・フィルトレーションは全く役に立たないことが著者により見出された。しかし、著者は、例外型の場合を扱うため、巧妙に定義された写像を導入することにより、この障害を乗り越え、鮮やかな計算で基底と指数を求めることに成功した。この写像は、若神子写像とも呼ばれるべきもので、今後の研究においても大きな役割を果たすであろう。また、例外型でない場合(通常型)には、原始微分の理論やホッジ・フィルトレーションを用いて基底を構成するのであるが、その場合でも、定数重複度でないことから、原始微分の共変微分がコクセター群で不変でなく反不変であることに起因する困難が生ずるのだが、そこを巧みに避けて基底を構成していることも著者の高い力量を示すものである。

これを要するに、著者は、コクセター配置の基底と指数について重要な新知見を得たものであり、

コクセター配置の研究に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。