

学位論文題名

Study on the homotopy theory of phrases and  
its application to curves and links

(フレーズのホモトピー理論とその曲線及び絡み目への応用に関する研究)

学位論文内容の要旨

V.Turaev は 2005 年頃, 一般化された語やフレーズ (etale word, etale phrase, nanoword

及び nanophrase と呼ばれる) に対し S- ホモトピーと呼ばれる同値関係を定義し, 語のトポロジーの理論を導入した. これは, 結び目理論における仮想結び目の理論や, 仮想糸の理論の組み合わせ的拡張と言えるものである. 本論文は, 語のトポロジー理論 (特にホモトピー理論) に関して得られた結果をまとめたものである.

まず, 語の S- ホモトピーによる nanoword の分類に関しては, S が特別な場合 (この場合の S- ホモトピーをホモトピーと呼ぶことにする) に, Turaev が長さ 6 以下の nanoword 及び長さ 5 以下 etale word に対して, ホモトピーによる分類を行った. そこで本論文では, 文字数が 4 以下の nanophrase 及び文字数が 4 以下の monoliteral な etale phrase を, フレーズの成分数の制限をつけずにホモトピーによる分類を行った. また, 分類を行うために, いくつかの新しい nanophrase のホモトピー不変量を構成した.

また, 本論文では, Turaev の語のホモトピーの理論を一般化したものを考えた. そして, 一般化された語のホモトピー理論のいくつかの特別な場合に対して, 曲面上の基点, 順序付き曲線や, 絡み目図式の安定同値類, 安定同相類などの幾何学的な対象からの一対一写像を与え, 更にその写像による像も決定した. また, この対応を利用して, いくつかの nanophrase のホモトピー不変量を, 一般化されたホモトピーでの不変量に拡張できることを示した. その過程で, A. Gibson によって導入された Gauss phrase に対して定義されていた  $S_{\{0\}}$  不変量を一般の nanophrase のホモトピー不変量へ拡張した. この拡張問題は, A. Gibson によって提出されていたものであり, 本論文はそれに対してひとつの解答を与えたことになる. なお, この拡張は同時に Turaev によって定義された nanoword のセルフリンキング関数の nanophrase への拡張になっていることが, A. Gibson によって指摘されている. なお, 本論文ではホモトピーより, より一般の S- ホモトピーに対しても不変になるような,  $S_{\{0\}}$  不変量の拡張も与えている.

更に, 本論文では, 任意の順序, 基点付きの仮想多重糸の不変量を, nanopraser のホモトピー不変量へ拡張する方法についても述べている. なお, この方法と早稲田大学の伊藤昇との共著において構成した pseudolink に対する Khovanov homology を組み合わせることにより, Turaev が構成した nanoword の不変量の多くの不変量とは独立な不変量が得られることが知られている.

# 学位論文審査の要旨

主査	教授	石川剛郎
副査	教授	泉屋周一
副査	教授	小野薫
副査	准教授	秋田利之
副査	准教授	大本亨

## 学位論文題名

### Study on the homotopy theory of phrases and its application to curves and links

(フレーズのホモトピー理論とその曲線及び絡み目への応用に関する研究)

幾何学の分野において、結び目や絡み目の分類、あるいは平面曲線・フロントの分類は、素朴な問題であり古来より研究が続けられてきた分野であると同時に、現代数学の発展に伴い、現在も世界的に活発に研究されている分野の一つである。最近、V.Turaev 等により、これらの幾何学的対象を、「語」あるいは「フレーズ」に置き換え、組み合わせ論的に研究し、不変量を発見することにより分類する方法が生まれ出されつつある。この新しい方法である「語のトポロジー理論」は、結び目を語として捉えることによって、「仮想結び目」など従来の幾何学を超えた対象を扱うことを可能とし、その結果、通常の幾何学への応用も見いだされている。

このような世界的な研究の発展の中で、申請者は学位論文「フレーズのホモトピー理論とその曲線及び絡み目への応用に関する研究」において、語のトポロジー理論における多成分のフレーズに対する不変量を新たに発見し、その結果、V.Turaev が扱った枠組みを超えて、いくつかの場合にフレーズの分類問題を解決した。特に、従来定義されていた「ガウスフレーズ」の不変量を「ナノフレーズ」の不変量に一般化することに成功し、その不変量を用いて、長さ4以下の「ナノフレーズ」のホモトピー分類、長さ3以下の「エタールフレーズ」の分類、長さ4以下の「モノリテラルフレーズ」の分類などを完成した。さらに、語のトポロジー理論におけるホモトピーの概念を一般化し、幾何学的対象との対応を明らかにすることで、語のトポロジー理論、とくにフレーズのホモトピー理論の拡張を視野に入れた多く知見を与えている。語のトポロジー理論と曲面結び目や特異点理論との関係も新たに考察していて、独創性が極めて高い学位論文である。

以上の理由から、申請者 福永知則は、主査、副査全員による審査に合格した。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認められる。