博士(理学) 服部良平

学位論文題名

On Thomae type Formulas for Z_3 Curves and Mean iterations derived from transformation formulas for the hypergeometric function

(Z_3 曲線に関する Thomae 型公式および
超幾何関数の変換公式から得られる平均反復についての研究)

学位論文内容の要旨

本論文は，以下の 2 部により構成されている．

第1部.　Z_3 曲線に関する Thomae 型公式についての研究,
第2部.　超幾何関数の変換公式から得られる平均反復についての研究.

第 1 部は超楕円曲線に関する Thomae の公式の一般化に関する研究である．古典的な Thomae の公式は半整数を指標として持つテータ定数を超楕円曲線の分岐点の関数として記述するものであり, Thomae(1866)に端を発する．その後, Bershadsky, Radul(1987, 1988)においてその一般化が紹介された．以来, Thomae 型公式と呼ばれるその一般化に対する考察は盛んに研究されている．実際, Gonzalez(1991), Nakayashiki(1997), Matsumoto (2001), Enolski, Grava(2006)など，様々なアプローチを用いた研究が行われている．特に近年, Eisenmann, Farkas(2008)では 3 重被覆に関する Thomae 型公式の初等的な証明が紹介されている．しかし，そこでは公式の最終形がテータ定数の 6 乗が現れる形になっている．本研究では, 3 重被覆に関する Thomae 型公式の先行する緒結果との別証明を紹介している．特に, 3 重被覆の整係数ホモロジー群の良いシンプレクティック基底を具体的に構成する手法は機能的かつ画期的であり，一般の次数の被覆曲線に対しても適用が期待される.また，従来は限定された場合だけでしか求められていなかった Thomae 型公式に現れる符号を完全に決定すること，つまりテータ定数の 3 乗に対する公式を与えることに成功した．

第 1 部は，大きく次のように構成されている．

1. 射影直線の 3 重被覆の周期，特に整係数ホモロジー群のシンプレクティック基底の構成, それらとユニタリ群，シンプレクティック群の関連,
2. アーベル・ヤコビ写像によるテータ関数の引き戻しの零点についての考察及び分岐点の入れ替えによって生じるモノドロミー行列に関する記述,
3. 主結果の紹介，証明.

以下，これらに沿った形で内容を紹介する．全体を通して 3 重被覆を扱うことになるが，このときに重要となるのが 1 の原始 3 乗根を掛けることで定義される被覆変換(自己同型)写像である．整係数ホモロジー群の基底及び正則微分からなるコホモロジー群の基底を選ぶ際，この自己同型写像によってもたらされる各々の群上の自己同型写像と整合的であることが本質的に必要となる．それらの良い基底を選んだことで，周期行列に関する種々の性質がより見やすい形で記述されることになる．例えば，正規化された周期行列にあるエルミート対角行列を掛けたものが 1 の原始 3 乗根のみからなる対角行列と相似であることがわかる．さらに，周期行列がグラスマン多様体の中のある対称領域に属す元を用いて記述されること，さらに

その元が前述の行列の固有空間の基底と一対一に対応していることなどもわかる．また，前出のエルミート行列を保つ複素行列からなるユニタリ群を導入することにより，周期写像や分岐点への置換の作用などとの関連が見やすくなる．このユニタリ群はシンプレクティック行列からなるある部分群と同型であることがわかるが，その同型対応はシンプレクティック群のジーゲル上半空間への作用と合致していることが証明されており，これ自身も興味深い話題であると思われる．

次にテータ関数及びテータ定数の定義及び当論文で用いるそれらの簡単な性質及びシンプレクティック群の作用に関する重要な変換公式を紹介する．その後，アーベル・ヤコビ写像をテータ関数で引き戻したものを考え，その特徴，特に零点の分布について詳しく調べる．考えているコンパクトリーマン面が単連結ではないので，上述の関数は多価関数となる．しかし，ここではその多価性を逆手に取り，関数論，多様体論及び二次形式論の問題に帰着させることで，零点の情報を得ることができる．流れとしてはまずある特定の指標に対して具体的な計算を行い，それを起点にして置換群の分岐点への作用によって網羅的に零点の分布を調べることになる．しかし，ここで得られる情報はある意味で限定的で，特にテータ関数の指標と零点の分布との間の対応を具体的に記述することはそれまでの準備のみではできない．その理由として，分岐点の入れ替えによって生じるモノドロミー行列の形がそれほど単純ではないということが挙げられる．分岐点が入れ替わる，つまり分岐点に置換が作用したときに分岐点を結ぶ道がどのような変換を受けるのかはよく研究されており，それを用いて我々の整係数ホモロジー群のシンプレクティック基底がどのように変化するのかを見ることになる．ホモロジー群の基底の取り方はシンプレクティックであることの他，前述のようにある自己同型写像と矛盾しないことが課されていたのだが，それらの条件を保ちつつ，モノドロミー行列が簡単な形になるように取り替えることが可能であることがわかった．具体的には，シンプレクティック群の元であるモノドロミー行列を一度ユニタリ群の中で見直し，それらの固有値・固有ベクトルに関する情報を整理することで，モノドロミー行列のある種の標準化を行うのである．その標準化によってシンプレクティック群のテータ関数への作用に関する変換公式が扱いやすくなり，主結果につながる重要な補題・命題の証明が簡潔になる．

最後に主結果を述べ，その証明を与えることになるが，そのために有限体上の二次形式論を導入することになる．テータ関数の零点の分布を有限体上のベクトルを用いて記述することにより，いくつかの簡単ではない問題を線形代数の初等的な問題に帰着させることができる．この時点で零点の分布の情報を行列の演算で説明できるようになり，主結果であるThomae 型公式の証明がある程度まで完成したと言える．これらの準備をもとに，3 重被覆上のある大域的な有理型関数を構成し，その有理型関数に適当な値を代入するなど，うまく計算することにより，ある一つの特別な場合について，テータ定数の 3 乗の比が分岐点の有理関数として記述できる．このようにして得られる等式に置換，即ちモノドロミー行列を作用させることで考えている全ての指標に関する等式が得られ，証明は終了する．

第 2 部は算術幾何平均に関する Gauss の定理の類似に関する研究である．2 つの正数が与えられたとき，それらの算術平均および幾何平均が定まる．更にそれらの算術平均および幾何平均が定まる．このような操作を繰り返すことにより数列の対が得られる．これらの数列は共通の極限を持ち，その極限値ははじめの 2 数の算術幾何平均と呼ばれる．算術幾何平均は超幾何関数を用いて表示されることが知られている．このことは超幾何関数の Gauss の変換公式を使うことで証明される．

一方，Goursat(1881)において，Goursat は超幾何関数の代数的な変換公式のリストを挙げた．この Goursat のリストを基にして上述のような平均反復を導入し，得られる数列対の共通極限を超幾何関数を用いて表示することが主な内容である．はじめに Borwein J.M, Borwein P.B (1998)の手法を用いて平均反復の概念を定式化し，それを礎に Goursat のリストに掲載されている超幾何関数の変換公式を具体的に吟味していくことになる．2 次の変換公式，3 次の変換公式から得られる算術幾何平均について述べた後，_3F_2 と呼ばれる拡張された超幾何関数の変換公式に関する話題について言及している．

学位論文審査の要旨

主　査　教　授　松　本　圭　司
副　査　教　授　寺　尾　宏　明
副　査　教　授　岩　崎　克　則
副　査　准教授　齋　藤　　　睦

学 位 論 文 題 名

学 位 論 文 題 名

On Thomae type Formulas for Z_3 Curves and Mean iterations derived from transformation formulas for the hypergeometric function

(Z_3 曲線に関する Thomae 型公式および
超幾何関数の変換公式から得られる平均反復についての研究)

学位申請論文は２部構成となっている。第一部はトマエの公式、第二部は算術幾何平均に関する研究である。それぞれの研究内容と学術的な価値が以下のようであることが認められた。

(1) 超楕円曲線に対して、１次ホモロジー群のシンプレクティック基底を与えると正規化された周期行列 τ が得られる。τ を変数とする半整数標数をもつテータ定数たちの比は、超楕円対合の固定点たちを変数とするある多項式たちの比と一致する。この事実はトマエの公式として古くから知られている。超楕円曲線を複素射影直線の３次巡回被覆 C に変更した場合のトマエの公式は、いろいろな研究者によりさまざまな手法により結果が出されている。服部氏はアーベル・ヤコビ写像による指標付きテータ関数を曲線 C に引戻し、その零点の分布と位数を正確に与える方法を開発した。その手法により現在までに知られているトマエの公式３次巡回被覆版をより強力な形に改善し、そしてアーベルの定理に基づくとても見通しのよい公式の証明を与えることに成功した。

(2) ２つの異なる正数 a, b に対して相加平均と相乗平均をとることで新たな２つの異なる正数 a',b' ができる。この二数に対して同じ操作を繰り返すことで２組の数列ができ、それらは同じ値に収束している。その極限値は a,b の算術幾何平均とよばれ、ガウスの超幾何関数のみたす関数等式を利用して具体的に表示することができる。服部氏はグルサーが発見した超幾何関数のみたす関数等式のうち、このような数列の組を与えるものを類別し新種の平均反復を定め、得られる数列組の極限を超幾何関数で表示した。

第一部の結果はこれまでに知られている結果の改良を伴う別証明であり、第二部の結果は全く新しい発見で

ある。さらに改善されたトマエの公式３次巡回被覆版は、算術幾何平均の多項版への応用研究の基盤ともなっている。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認められる。