

学位論文題名

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF
SPACELIKE SUBMANIFOLDS IN DE SITTER SPACE

(ド・ジッター空間内の空間的部分多様体の微分幾何学)

学位論文内容の要旨

本論文ではド・ジッター空間内の空間的部分多様体から構成される写像が持つ特異点の幾何学的意味を調べ、低次元の場合に分類される特異点の幾何学的性質について研究した。

泉屋、Pei、佐野氏らは双曲空間内で超曲面からガウス像を定義し、ルジャンドル特異点に関する理論を用いて微分幾何学的な研究を行った。

4次元ド・ジッター空間は Einstein 方程式を満たす真空解の一つで、ミンコフスキー空間内で正の定曲率をもつ空間である。したがってド・ジッター空間の幾何学はミンコフスキー空間内の擬球面の幾何学ととらえられる。本論文ではルジャンドル特異点に関する理論を用いて、ド・ジッター空間内で超曲面・余次元2以上の部分多様体の幾何学を研究することを目的とする。

第I部ではド・ジッター空間内にある空間的超曲面の研究を行った。まず超曲面の光的法線方向によって定められる写像を光錐ガウス像とし、光錐ガウス像から光錐主曲率・光錐ガウス曲率を定義した。これらの曲率はローレンツ変換で不変な量である。

次に超曲面の形と曲率の関係を調べた。各点で主曲率が全て一致した全臍的なタイプの超曲面は3つの種類に分類されることが分かった。これに対してユークリッド空間内の全臍的な曲面は超球面と超平面の2種類しかない。したがってド・ジッター空間内の全臍的超曲面の方が1種類多い事が分かる。ガウス曲率が0の全臍的な曲面は平坦な曲面ととらえられるので、本論文ではド・ジッターホロ球面と呼ぶことにする。

さらに光錐高さ関数と呼ばれる関数族を定義した。光錐ガウス像は光錐高さ関数の判別集合で、光錐ガウス像の特異点は超曲面上にある光錐ガウス曲率0の点と対応する。この特異点上で高さ関数のヘッセ行列が退化する。本論文では光錐高さ関数がモース超曲面族であることを示し、光錐高さ関数を生成族とするルジャンドルはめ込み芽を構成した。

また3次元ド・ジッター空間上のすべての曲面を近似するジェネリックな曲面のクラスを考え、光錐ガウス曲率が0になる点の近傍で曲面がどのような幾何学的性質を持つかを研究した。光錐ガウス曲率0の点の集合は曲面上で滑らかな正則曲線をなし、この正則曲線上においてガウス像はA2型(カスピダルエッジ)とA3型(スワローテイル)という2種類の特異点を持つことが分かった。さらにそれぞれの特異点をもつ曲面がド・ジッターホロ球面と接触した場合の接触型を調べ、実際の例も構成した。

第II部では余次元2の空間的部分多様体の研究を行った。泉屋・Pei・Romero Fuster 氏らはミンコフスキー空間内の空間的部分多様体の光的法方向を一意的に正規化することで研究を行った。本論文では泉屋氏らの方法によって決まる光的法方向を光的ガウス写像と定め、光的ガウス曲率と光的主曲率を定義した。

次に部分多様体の光的法方向に沿って伸びる線織面を構成した。これを光的超曲面と呼ぶ。光的超曲面の特異点は光的主曲率が0でない値を持つときに現れる。主曲率0に対応する特異点は無限遠にあり、光的超曲面上には現れない。特異点の *corank* は光的主曲率の値の重複度と対応する。特に *corank* が最大でかつ光的ガウス曲率が0（平坦）ではない場合は、空間的部分多様体がある光錐の上に存在することが分かる。

さらに光的ガウス写像の特異点の幾何学的解釈を調べた。この特異点は光的ガウス曲率0の点に対応し、*corank* は0の値をとる光的主曲率の数に等しい。したがって光的ガウス写像の特異点は光的超曲面の特異点と異なる幾何学的意味を持つことが分かる。

最後に4次元ド・ジッター空間内のジェネリックな空間的曲面を考察した。光的ガウス写像の特異点はA2,A3型の2種類が現れる。また光的超曲面の特異点はA2,A3,A4,D4+,D4-型の5種類が現れる。A2,A3,A4型の*corank* は1で、一つの光的主曲率に対応する特異点である。一方、D4+,D4-型は*corank* が2となって曲面の2つの主曲率が一致する点に対応する。さらにそれぞれの型について空間的曲面と光錐の接触の様子を調べ、その分類を行った。

第Ⅲ部では余次元2以上の空間的部分多様体の研究を行った。泉屋・Pei・高橋・Romero Fuster氏らは双曲空間上で部分多様体の平行な擬正規直交枠から管状超曲面を構成した。これに対して本論文ではド・ジッター空間内の空間的部分多様体から2種類の管状超曲面を構成した。前半では空間的管状超曲面と部分多様体との幾何学的関係を調べ、後半では時間的な管状超曲面についての考察を行った。

第Ⅲ部の前半では管状超曲面の構成の前に、まず部分多様体の空間的法線ベクトル場に依存して定まる主曲率・ガウス曲率を定義した。この主曲率に関して全局的な部分多様体は、第Ⅰ部で調べた空間的超曲面と類似した分類が与えられる。特に主曲率が全て0になる平坦な部分多様体はド・ジッターホロ球面に含まれる。空間的部分多様体の全での主曲率が0の点をド・ジッターホロ球面的点と呼ぶ。

また空間的管状超曲面の光錐ガウス像の特異点（光錐ガウス曲率0の点）は、空間的部分多様体のある空間的法線ベクトル場に関するド・ジッターホロ球面的点に対応する。この対応は管状超曲面の半径のパラメータによらない。

さらに本論文では空間的部分多様体のド・ジッターホロ球面的点を特異点に持つド・ジッターホロ球面的超曲面を定義した。ド・ジッターホロ球面的超曲面は空間的管状超曲面の光錐ガウス像と相似の関係にあり、2つの写像間の特異点型が一致する。

上述の2つの写像を判別集合とする関数族がそれぞれ定義される。低次元の場合にはジェネリックな空間的部分多様体は、ド・ジッターホロ球面的超曲面・光錐ガウス像と関数族の特異点型は1対1に対応している。またこの関係は空間的部分多様体とド・ジッターホロ球面との接触型にも対応する。

第Ⅲ部の後半では時間的管状超曲面と空間的部分多様体の幾何学的関係を調べた。空間的部分多様体に対しては、時間的法線ベクトル場に関する主曲率を定義した。時間的管状超曲面に対しては、泉屋氏が導入した時間的超曲面のド・ジッターガウス像とド・ジッター主曲率を用いた。

時間的管状超曲面のド・ジッターガウス像の特異点（ド・ジッターガウス曲率0の点）は、空間的部分多様体の主曲率と対応する。しかし空間的管状曲面の場合と異なり、主曲率の値は時間的管状超曲面の半径のパラメータに依存する事が分かった。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 泉 屋 周 一

副 査 教 授 山 口 佳 三

副 査 教 授 石 川 剛 郎

副 査 准教授 古 畑 仁

学 位 論 文 題 名

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF SPACELIKE SUBMANIFOLDS IN DE SITTER SPACE

(ド・ジッター空間内の空間的部分多様体の微分幾何学)

本論文ではド・ジッター空間内の空間的部分多様体から構成される写像の特異点の幾何学的意味を調べ、低次元の場合に分類される特異点の幾何学的性質について研究している。4次元ド・ジッター空間はEinstein方程式の真空解の一つで、ローレンツ空間形で正の定曲率をもつものであり、最近のインフレーション宇宙論のモデルを提供するなど、一般相対性理論においても重要な意味を持つ空間である。申請者は、ルジャンドル特異点論を用いて、ド・ジッター空間内の部分多様体の幾何学を研究した。本論文は3部構成となっており、第I部ではド・ジッター空間内の空間的超曲面の研究を行っている。申請者は超曲面の光的法線方向により定まる写像を光錐ガウス像とし、光錐ガウス像からローレンツ不変量である光錐主曲率と光錐ガウス曲率を定義している。これらの曲率を研究するために光錐高さ関数と呼ばれる関数族を定義してそれがモース超曲面族であることを示し、光錐高さ関数を生成族とするルジャンドルはめ込み芽を構成している。さらにルジャンドル特異点論を応用することにより、光錐ガウス曲率の零点集合においてド・ジッター-ホロ球面との接触の退化の様子を明らかにしている。第II部では余次元2の空間的部分多様体の研究を行っている。ド・ジッター空間の特色の一つである、未来方向の光的測地線が空間内の直線となる事を利用して、光的ガウス写像を定め、光的ガウス曲率と光的主曲率を定義している。さらに光的ガウス写像の特異点の幾何学的解釈を調べている。次に部分多様体の光的法方向に沿って伸びる線織超曲面として定まる光的超曲面の具体的径数付を与え、その特異点を調べている。光的超曲面の特異点はブラックホールの境界など様々なタイプの時空の地平線の形状と密接に関連しており、相対論的宇宙論においても重要な対象である。申請者は、相対論的に最も重要と思われる4次元の場合に空間的曲面に付随する光的超曲面や光的ガウス写像の特異点の分類をルジャンドル特異点論の応用により与えている。さらに、第III部では余次元2以上の一般の空間的部分多様体の研究を行っている。ユークリッド空間内の部分多様体の場合は半径が十分小さい管状近傍の境界である管状超曲面を考えてその超曲面としての性質との対応を考えるのが常套手段であるが、この場合は、そのような超曲面は空間的部分と時間的部分の2つの成分を持つ。申請者はそれぞれの場合に、ルジャンドル特異点論を適用することにより、曲率等を定めその幾何学的意味を明らかにし、2つの成分上では、幾何学的状況が全く異なることを明らかにした。本論文の3つの部分は一貫して、空間的部分多様体の幾何学的性質をルジャンドル特異点論の応用により研究するという立場を貫き、その結果、相対性理論と関連する微

分幾何学において重要で新たな知見をえたものである。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認められる。