

学位論文題名

The Rohlin property for automorphisms of
the Jiang-Su algebra

(Jiang-Su 環の自己同型に対する Rohlin 性)

学位論文内容の要旨

ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素全体 $B(H)$ の中に表現される作用素環と呼ばれる数学的対象について、これらは主に弱位相によって定義される von Neumann 環と、ノルム位相によって定義される C^* 環に分けられる。互いに分類理論が中心的な話題の一つだが、本研究は主に幾何的側面の強い後者の C^* 環を対象としている。 C^* 環の分類理論は、1990 年代に Elliott によって K 理論の言葉を用いて行なわれた。これは Glimm 環 (UHF 環) と呼ばれる環の分類理論を大きく拡張したもので、要約して述べると射影の情報を K_0 群、ユニタリの情報を K_1 群で表し、これら K 群の情報が一致した時に、あるクラスの C^* 環が同型であるという定理を与えた。

この分類理論の中で最も重要な C^* 環の一つに Jiang-Su 環と呼ばれる射影の無い C^* 環がある。射影を含まない C^* 環とは、幾何学的には「連結空間を非可換化したもの」に対応する。ごく最近、Toms, Lin, Niu, Winter ら多くの研究者によって「ある広いクラスの C^* 環について、Jiang-Su 環をテンソルの形で吸収するものは、 K 群とトレースの情報で分類可能」(corollary 1.4, arXiv: 0910.2061) という事が示された。この定理は言い換えれば、ある C^* 環に、Jiang-Su 環をテンソルする事で、その C^* 環の持つ K 群の情報を変えずに分類可能なものに変換できるという事を表す。本学位論文では、特に Jiang-Su 環と、これと類似する射影の無い C^* 環の上の自己同型について研究した。

C^* 環の自己同型または群作用の分類理論は、最初に岸本が AT-環 real rank zero と呼ばれるクラスの C^* 環に対して行った。この自己同型の分類定理では「Rohlin 性」と呼ばれる、元々 Connes が von Neumann 環に対して定義した自己同型の性質を用いて、 K 群の情報により、 $\text{Aut}(A)/\text{Inn}(A)$ の共役性が与えられた。この定理は上記の Elliott による C^* 環自身の分類理論に沿った自己同型の分類定理にあたる。その後、この「Rohlin 性」を用いる手法によって、中村が Kirchberg 環と呼ばれるクラスの C^* 環に対する自己同型の分類を行なった。その他多くの研究者によって C^* 環の自己同型、または群作用の分類が行なわれ、現在 C^* 環自身の分類理論と平行して研究が進められている。これら既存の自己同型の分類定理は射影によって定義された「Rohlin 性」によるもので、射影のない C^* 環に対して、今まで自己同型の分類定理は証明されていなかった。本学位論文ではこの射影が無いという問題点を回避し、Jiang-Su 環と呼ばれる射影の無い C^* 環の自己同型に対して Rohlin 性に類似した weak Rohlin 性を導入し、以下の定理を証明した。

単位的 C^* 環 A に対して自己同型群を $\text{Aut}(A)$ 、内部的自己同型全体からなる部分群を $\text{Inn}(A)$ で表す。特に A が唯一のトレースを持つ時、弱内部的自己同型全体からなる部分群を $\text{WInn}(A)$ で表す。Jiang-Su 環は唯一のトレースを持つ単位的 C^* 環である。

定理 1 (Theorem 1.8) Jiang-Su 環 Z の自己同型が weak Rohlin 性を持つ事と、自己同型が商群 $\text{Aut}(Z)/\text{WInn}(Z)$ の中で非周期的である事が同値。

定理 2 (Corollary 1.7) Jiang-Su 環 Z の weak Rohlin 性を持つ自己同型は互いに $\text{Aut}(Z)/\text{Inn}(Z)$ の中で共役。

また、Jiang-Su 環の構成方法を一般化し、任意の可算アーベル群を K_1 群として持つ射影の無い C^* 環 A の構成を与え、そのクラスの C^* 環に対して次の定理を与えた。

定理 3 (Theorem 1.5) A とその上の weak Rohlin 性を持った自己同型について、それらにより定義される接合積 C^* 環は、Jiang-Su 環をテンソル積に関して吸収する。

定理 4 (Theorem 1.9) weak Rohlin 性を持つ A の自己同型は互いに $\text{Aut}(A)/\text{WInn}(A)$ の中で共役。

ここで、定理 4 は A の $K1$ 群の情報を無視した粗い仮定に対して、 $\text{Aut}(A)/\text{WInn}(A)$ 中での共役性という粗い結論を与えている点で、定理 2 とは独立したものである事が解かる。これらの研究により射影の無い C^* 環でも、既存の射影を多く含む分類可能な C^* 環と同様に、自己同型の分類定理が証明出来る事が明らかとなった。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 岸 本 晶 孝

副 査 教 授 林 実樹廣

副 査 准教授 山之内 毅 彦

学 位 論 文 題 名

The Rohlin property for automorphisms of the Jiang-Su algebra

(Jiang-Su 環の自己同型に対する Rohlin 性)

著者は、作用素環、そのなかでも特に C^* 環について研究してきた。

C^* 環論では近年その分類に関する研究が大きな潮流をなしている。分類になじみうると考えられているものはある意味で有限近似可能だとみなされる「従順な C^* 環」に限られ、さらに当面は主に（代数的に）単純な C^* 環に的が絞られている。「純粹無限」の場合は 90 年代半ばには一応の解決をみたが、「有限」の場合ははるかに複雑で、現在の手段（ K 理論とそれを補完するいくつかの解析的な理論）では分類不可能な C^* 環の存在することもわかってきた。その分類になじみうるものを篩にかける C^* 環として、Jiang-Su 環といわれるものの重要性が最近認識されてきた。この環はトレースをひとつだけもつ無限次元単純 C^* 環であるが、 K 理論的には複素数体と区別がつかない C^* 環であり、分類可能な無限次元 C^* 環はこの環を吸収する、つまりそれをテンソルしても同型になると考えられている。

学位論文はこの Jiang-Su 環に関するものである。特筆すべき結果は、この環の自己同型で十分に外部的になるもの（この環の一意的なトレース表現でそのすべての冪が外部的であるという必要な条件をそなえたもの）はすべて、内部同型を除いて共役になることを示したことである。これによってこの環に重要な性質をさらにひとつ付け加えたことになる。この種の結果は従来その環に射影が多く存在するとして Rohlin といわれる性質を用いて示されてきたが、じつは Jiang-Su 環は上に述べた性質により自明でない射影をもたない。そのため著者は、この環の構造に関する最近の結果を巧妙に利用して、証明の途中において UHF 環といわれるものをテンソルして従来の手法が使える状況を作り出し、それをまたもとの環に引き戻すという複雑な手法を創出した。結果の重要性とともにこの手法の広範な応用性に期待がかかる。その他の結果として、Jiang-Su 環を吸収する環の接合積がまたこの環を吸収する条件をあたえ、分類可能な C^* 環の範囲を広げた。また、任意の可算可換群を $K1$ 群としてもつような、Jiang-Su 環のように $K0$ 群が整数群である単純 C^* 環の一般的構成法を与え、その環上の自己同型に関する知見を与えた。これらは、 C^* 環論への重要な寄与であるとともに、著者の C^* 環、別しては Jiang-Su 環に対する幅広い知識と理解を示し、さらに自己同型の解析においてそれらを使いこなす力量を示したものといえる。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認められる。