

学位論文題名

Study on Uniqueness of Positive Solutions to Semilinear Elliptic Equations

(半線形楕円型方程式の正值解の一意性に関する研究)

学位論文内容の要旨

半線形楕円型方程式は、物理学や工学のさまざまな文脈において現れる。また、半線形シュレーディンガー方程式の定在波解を記述する方程式としても重要である。本論分では、無限遠方で減少する全空間での解を主に考える。

数学的な興味としては、方程式にそもそも解が存在するのかが最も大事な話題である。その次には、得られた解の具体的な性質を調べるのが問題となってくる。

現代の解析学においては、半線形楕円型方程式に対して、変分法を用いて(弱い)解の存在を示すことは比較的容易である。またそのようにして得られる正值解が古典的な解(強い解)であり、球対称であり、遠方で指数関数的に減少するということがよく知られている。しかしこれ以上の解の定性的な様子を調べることは大変興味のある問題であるにもかかわらず、便利な抽象理論があるわけでもなく、難しい。

特に正值解の一意性を数学的に厳密に証明することは難しい。物理的には、正值解は基底状態に対応し、解が一意的であることは当然に思われるのに、である。それゆえ多くの魅力的な未解決問題が残されている。とりわけ一意性が成り立つ非線形項の必要十分条件を与えることは、一つの大きな目標である。

正值解の一意性には数学的なさまざまな応用がある。例えば、対応する半線形シュレーディンガー方程式の定在波解の安定性と関係がある。

さらに正值解の具体的な形状について知ることは、解の構造に関して更に深い理解を得ることへの手がかりとなる。

単独解の場合には、正值解の一意性は知られているし、解の多くの性質もわかってはいるが、残されている問題について少し触れる。解が、 $\mathbb{R}^N$ 空間次元 N という別々のパラメーターにどう関係するのかという問題はまだよくわかっていない。また必ずしも正值とは限らない解の一意性、つまり、零点の数が与えられたときに(その数だけ零点を持つ解の存在は知られているが)解は一意的かという問題もまだ残されている。また、有界領域でディリクレ境界条件(境界で零)のもとで得られる解の具体的な形状を知ることは、全空間の場合よりも難しくよくわかっていないことが多い。特に全空間の場合、正值解の最大値は p に関して単調に増大するということが知られているが、球体領域の場合は単調ではないということが明らかになっている。

本論文は、二つの冪乗の差として表される非線形項の、正值解(基底状態解)の一意性とその最大値の大きさの評価について考える。この種の非線形項はボゾンガスの相互作用を記述する方程式や非線形光学にあらわれ重要である。本論文は二つの部分からなる。

第一部では、非線形項が遠方で減少関数となるということを用いて、特別な場合には一意性は容易に得られることを指摘した。非線形項の‘増大度’をセーブできれば一意性が得られるというペレティエ・セリンの結果を用いた。

第二部では、冪 p, q と線形項の係数を固定したとき、一意な正值解の最大値が下から評価できることを示した。キーになるのはポボザエフ等式である。ポボザエフ等式から出てくる関数の形状を丁寧に観察すれば、正值解はその関数の唯一の正の零点より小さくならないことがわかる。またこの結果は他の方法でしられていた結果より良いことも指摘した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 高 岡 秀 夫

副 査 教 授 神 保 秀 一

副 査 准教授 津田谷 公 利

副 査 教 授 小 澤 徹 (早稲田大学理工学術院)

学 位 論 文 題 名

Study on Uniqueness of Positive Solutions to Semilinear Elliptic Equations

(半線形楕円型方程式の正值解の一意性に関する研究)

非線型シュレディンガー方程式の記述する物理現象は、ボース・アインシュタイン凝縮、プラズマ中のラングミュア波動、流体中の渦糸など、多岐に亘って普遍的に観察されるものの一つである。その中でも、時間的に周期性を持ち、空間的に局在して分布する定在波は、物理学的な興味とともに数学的にも極めて重要な研究対象である。定在波の満たす方程式は非線形楕円型方程式となるが Gidas-Ni-Nirenberg の対称性理論によって、波動関数が本質的には球対称の場合、即ち動径方向の変数にのみ依存する場合に帰着される。

河野真士氏は、この様な状況で現れる非線形常微分方程式について研究した。特に、最も基本的な問題である解の存在と一意性について、以前から知られている理論に新しい視点を与えると同時に、幾つかの新しい成果を得た。中でも解の存在と一意性が、定在波を特徴づける周波数に依存する状況を詳しく解析し、その臨界値を具体的に求めるとともに、その臨界値の数学的特徴付けが良く分かるような証明法を与えた意義は大きい。また、以前から知られている Ouyang らの長くて複雑な証明法を、短く簡単にし、数学的な本質が良く見える形にした功績は顕著である。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。