

On the exact WKB analysis for Painlevé hierarchies with a large parameter

(大きな変数を含むパンルベヒエラルキーに対する完全WKB解析について)

学位論文内容の要旨

完全 WKB 解析は Borel 総和法に基礎を置く漸近解析で、大きな変数を含む線形及び非線形方程式の解の大域的な挙動の解析において有用である。高階パンルベ方程式の解の大域的な構造を解析するためには、ストークス幾何の詳細な情報と自由パラメータを含む形式解 (インスタントン解) を必要とする。本論文ではこの事に対して 2 つの主要な結果を与える。前半では、野海山田方程式系 $NY_l (l = 2, 3, \dots)$ に対し、そのストークス幾何を記述する上で重要な役割を果たす第 2 種変わり点の個数を与える公式を導いた。後半では、パンルベ第 1 ヒエラルキー $(P_1)_m$ を考察の対象とし、多重スケール解析により $(P_1)_m$ のインスタントン解を構成した。

大きな変数 η をもつ線形常微分方程式を考察の対象とした時、WKB 法により求めた解 (WKB 解) は形式解であり発散する。この形式解に解析的な意味を与えるために、そのボレル和を考え、ボレル和の定義されるボレル平面上でのラプラス逆変換像 (ボレル解) を考える必要がある。一般に上で求めたボレル解はある特定の領域で元の形式解に漸近する。古典的な不確定特異点をもつ常微分方程式と同様に、この領域を超えて解を延長する時、ストークス現象が生じ、解の接続問題を考える必要がある。この元の形式解に漸近性を保つ領域は、変わり点と呼ばれる点から派生するストークス曲線によって特徴付けられる。従って変わり点とストークス曲線から構成されるストークス幾何は、WKB 解を研究するための重要な研究対象である。線形方程式と非線形方程式ではストークス幾何に重要な違いが見られる。線形方程式のストークス幾何は 1 種類のみの変わり点を含むが、非線形方程式のストークス幾何は 2 種類の変わり点を含む。特に、第 2 種変わり点と呼ばれる変わり点は、高階パンルベ方程式に特有のものである。従って非線形方程式のストークス幾何に関する研究において、第 2 種変わり点は不可欠な対象である。この論文の第 2 節では、野海山田方程式系の第 2 種変わり点の個数について研究する。野海山田方程式系 $NY_l (l = 2, 3, \dots)$ は一つのパンルベ階層で、付随する Lax pair は高階の線形方程式となる。非線形方程式 NY_l のストークス幾何を決定することは、完全 WKB 解析の重要な問題の一つとして近年精力的に研究されてきた。 NY_l に対する完全 WKB 解析の第 1 行程は、0-パラメータ解と呼ばれる η^{-1} の形式冪級数解を構成する事である。その形式解を構成するために、0-パ

ラメータ解の主部が満たす代数方程式を解かなければいけない。上記の代数方程式によって定義される代数多様体上の第1種変わり点を除く領域でその形式解を構成できることが知られている。0-パラメータ解の存在を調べるためには、 NY_I に付随する代数方程式の幾何的性質と NY_I の変わり点を研究する必要がある。変わり点の個数に関する研究は、先に述べた代数方程式が有限個の解を有することまで証明されてきた。次数が低い場合については、竹井氏 [29] により具体的に確かめられ、一般の場合については青木氏・本多氏 ([3],[4]) によって詳細に証明されている。最近彼らは NY_I の第1種変わり点の厳密な個数を求める事に成功した。(cf. [6])。この論文の第2節では、 NY_I の代数多様体を調べることにより NY_I の第2種変わり点の正確な個数を求めた。

第3節では、解の接続問題を記述する上で重要な役割を果たすインスタントン解の構成法について考える。1990年代に、青木氏・河合氏・竹井氏らによって、パンルベ方程式(P_J) ($J = I, II, \dots, VI$)の完全WKB解析の観点からの研究が進められた。彼らは、(P_J)のインスタントン解についての解析接続の具体的な記述など重要な成果を挙げた(cf. [8], [15], [16], [28])。その成功以来、高階パンルベ方程式に対する完全WKB解析の研究はめざましい発展を遂げてきた。この論文の第3節では、高階パンルベ方程式の一つであるパンルベ第1ヒエラルキー(P_I) $_m$ のインスタントン解の構成について研究する。伝統的なパンルベ方程式のインスタントン解の構成については、多重スケール解析によるものと、ハミルトン系に書き直した後Birkhoff標準形への変換を利用するものとの2つの方法が知られている。(P_I) $_m$ のインスタントン解の構成に関する研究については、初めに、竹井氏 [31] により後者の方法で(P_I) $_m$ のインスタントン解を構成できることが証明された。一方、前者の方法を用いた構成については、青木氏 [2] により、パンルベ第1ヒエラルキーの第2方程式(P_I) $_2$ のインスタントン解を構成できる事まで証明されてきたが、一般の m に対して構成できるかどうかはまだ確かめられていなかった。本論文の第3節では、一般の m に対しても、多重スケール解析を用いて(P_I) $_m$ のインスタントン解を構成できる事を証明した。

学位論文審査の要旨

主 査	准教授	本 多 尚 文
副 査	教 授	神 保 秀 一
副 査	教 授	山 下 博
副 査	准教授	齊 藤 陸

学 位 論 文 題 名

On the exact WKB analysis for Painlevé hierarchies with a large parameter

(大きな変数を含むパンルベヒエラルキーに対する完全WKB解析について)

本学位論文は、非線形微分方程式で重要なパンルベ方程式の高階化であるパンルベヒエラルキーに対し、そのストークス現象を完全 WKB 解析の手法を用いて解析したものである。

一般に摂動パラメータを持つパンルベ方程式系の解は摂動パラメータについての発散解であり、その解析的に意味付けした解は特定の領域でしか元の発散解に漸近しない。この漸近する領域は変わり点と呼ばれる点から派生する曲線群によって特徴付けられ、ストークス幾何を構成する。本論文で得られた、主要な結果の 1 つは、この変わり点の個数の評価公式を与えた事である。本論文で得た公式は一般的なパラメータに対して厳密な評価を与えており、大変優れたものである。具体的にストークス幾何を計算機等で計算する場合、変わり点の正しい個数が判っている必要があり、公式は理論的な意味のみならず、応用上も重要である。

この結果を踏まえ、更に大域的な解を構成しその挙動を把握する為には、いわゆる接続問題を考える必要がある。つまり、あるストークス領域の解をストークス曲線をこえて隣接する領域上に解析接続したときに、その解析接続解を隣接領域上の解で表現しなおす必要がある。この接続問題を考える上で重要な事は十分な任意パラメータを含む解を接続問題の基底として構成する事である。本学位論文の 2 つめの主要な結果はインスタントン 解と呼ばれる接続問題の基底を構成した事である。特に重要な成果は、解を構成する上で鍵となる非線形方程式(永年方程式)を導出し、それが大域的に解ける事を示した事である。この計算は非常に難しいものであり、本論文では様々な工夫によりこの困難を乗り越えている。

以上から学位論文審査において、「これらの結果は数学的な成果として重要な意義があり、また、その証明及び記述は厳密であり大変優れているものである」と意見が一致した。よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認めるものである。