

臨界系における秩序揺らぎと構造揺らぎ

学位論文内容の要旨

自然界には自己相似構造(フラクタル構造)を有する系が偏在している。磁性相転移やゾル・ゲル転移、超伝導転移など、臨界現象を示す平衡系では、秩序変数を構成する局所量の典型的な空間構造が臨界点においてフラクタルな構造をとる。また、非平衡なシステムにおいても、雲や木々、地形の凹凸、銀河団分布、血管の樹形構造など、随所にフラクタル構造を発見することができる。これらのフラクタル構造は出現するスケールもメカニズムも全く異なり、一見すると何等相关性がないように思える。しかしながら最近の研究により、フラクタル構造を示すような様々な長距離相関係には、ある種の統計的普遍性が存在することがわかってきた。

1998年 Bramwell 等は、乱流(非平衡系)のエネルギー散逸量の揺らぎと、2次元XYモデル(平衡系)の低温相における秩序変数の揺らぎとが、十分に大きな有限系に対して同じ非ガウス型の確率分布関数(パラメータ $a = \pi/2$ の一般化ガンベル分布)に従うことを示した。また、その後の研究により、パーコレーション・モデルやイジング・モデル等の平衡臨界系、砂山崩しモデルや森林火災モデルなどの自己組織化臨界性を示す系においても、秩序変数やエネルギー散逸量などの揺らぎが、一般化ガンベル分布で表せることが明らかとなった。これらの長距離相関係は、臨界現象や自己組織化臨界など、平衡・非平衡に関わらず何らかの意味で“臨界”と関係している。一方、臨界現象における秩序変数に代表されるように、一般化ガンベル分布に従って揺らぐこれらの確率変数は、システムの何等かの“秩序”を表す統計量である。従って、上記の系に見られる共通性は、臨界系における秩序揺らぎの普遍的性質と考えることができるが、その物理的起源は未だ明らかになっていない。また、これら先行研究のほとんどが実験的・数値的なものばかりであるため、“一般化ガンベル分布は臨界秩序揺らぎを表わす真の普遍分布か否か”という基本的問題や、臨界秩序揺らぎと構造揺らぎの関係についても解明されていない。これらの未解決問題を解決することは、自然界に存在する様々なフラクタル構造の統計的性質を理解する上で極めて重要である。

本論文では、有限サイズの平衡臨界系における秩序変数とフラクタル次元の分布関数を理論的・数値的に調べることで、臨界秩序変数の分布が臨界系の種類によらず真の意味での普遍性を有しているかを明らかにした。また、秩序変数分布が一般化ガンベル分布に従う際に、局所秩序変数の空間分布に見られるフラクタル性がどのように揺らぐかを解明した。多様な複雑系に潜む普遍的性質に関して本研究が与えた知見は、単に自然に対する深い洞察を与えるだけでなく、これらの普遍性を発現するようなフラクタル構造形成メカニズムの解明を通して新奇機能性フラクタル材料の創製にも重要な役割を果たすものであり、工学的にも大きな意味を持つ。

本論文は全 6 章で構成され、各章の概要は以下のとおりである。

第 1 章は緒論であり、本論文の主題である長距離相関を有する複雑系における秩序揺らぎと構造揺らぎに関する研究の背景と問題点を概説する。

第 2 章では、第 1 章で述べた研究背景の中で、特に臨界系における秩序揺らぎについて、これまでに得られている知見やその問題点を詳説する。また、極値分布として知られるガンベル分布の統計学的意味と、この分布関数を一般化した一般化ガンベル分布について詳しく説明する。本章の最後では、これらの背景や問題点を踏まえた上で、改めて本研究の目的について述べる。

第 3 章では、“一般化ガンベル分布は臨界秩序揺らぎの真の普遍分布か”という基本的問題に対して検討を行う。具体的には、臨界複雑ネットワークという特異な平衡臨界系の秩序変数の揺らぎを大規模数値計算により調べた。本章では、次数の分布関数がベキ則に従うスケールフリー・ネットワークと指数型次数分布関数を有するランダム・グラフの 2 種類の複雑ネットワークに対し、パーコレーション転移点における秩序変数 (最大クラスターのノード数比) の揺らぎの分布関数を計算した。その結果、臨界スケールフリー・ネットワークでは、秩序変数の揺らぎが一般化ガンベル分布とは一致しないことが明らかになった。このことは、“一般化ガンベル分布は臨界秩序揺らぎの真の意味での普遍分布ではない”ということの意味している。

第 4 章では、臨界系では局所秩序変数の空間構造は常にフラクタルであるという仮定に基づいて、秩序変数が一般化ガンベル分布に従う有限サイズ平衡臨界系のフラクタル次元の分布関数を解析的に導出している。本章での議論は平衡系に限ったものであるが、フラクタル構造における次元の揺らぎの一般的表式が解析的に示されたのは本研究が初めてである。秩序変数分布である一般化ガンベル分布が何のパラメータにも依存せず一意にその関数形が決まるのに対し、フラクタル次元の分布関数の一般的表式は、秩序変数の平均値と標準偏差の比に依存することが明らかになった。また、この解析的な表式が正しいことも 2 次元パーコレーション・モデルに対する数値計算により確認している。第 5 章で詳しく述べるように、本章で行った仮定に反して実際には臨界点においても非フラクタル状態が存在しているが、ここで行った数値検証は非フラクタル状態がフラクタル次元の分布に殆ど影響を与えないことを示している。

第 5 章では、臨界系における局所秩序変数の空間構造が常にフラクタル構造を取るという第 4 章で用いた仮定の正当性についての評価を行った。過去の研究により、量子臨界系では臨界点においても非フラクタル状態 (異常局在状態) が存在することが報告されているが、このようなフラクタル性そのものの揺らぎが古典的臨界系でも存在するか否かを明らかにすることが本章における研究の目的である。具体的には 2 次元パーコレーション・モデルとイジング・モデルに対し、臨界クラスターのフラクタル性の程度を定量的に調べた。その結果、無限臨界系においても非フラクタル・クラスターが有限の確率で存在することが明らかになった。また、この数値計算結果の正当性に関して、過去に行われた理論研究との比較の上で議論している。

第 6 章は結論である。臨界系における秩序揺らぎと構造揺らぎに関して本研究で得られた知見をまとめると共に、今後の課題について述べている。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 矢久保 考 介

副 査 教 授 明 楽 浩 史

副 査 教 授 丹 田 聡

副 査 准教授 根 本 幸 児 (大学院理学研究院)

学 位 論 文 題 名

臨界系における秩序揺らぎと構造揺らぎ

自然界には自己相似構造(フラクタル構造)を有する系が偏在している。磁性相転移やゾル・ゲル転移、超伝導転移など、臨界現象を示す平衡系では、秩序変数を構成する局所量の典型的な空間構造が臨界点においてフラクタルな構造をとる。また、非平衡なシステムにおいても、雲や木々、地形の凹凸、血管の樹形構造など、随所にフラクタル構造を発見することができる。これらのフラクタル構造は出現するスケールもメカニズムも全く異なり、一見すると何等関連性がないように思える。しかし、最近の研究により、フラクタル構造を示すような様々な長距離相関系には、ある種の統計的普遍性が存在することがわかってきた。1998年 Bramwell 等は、乱流(非平衡系)のエネルギー散逸量の揺らぎと、2次元XYモデル(平衡系)の低温相における秩序変数の揺らぎとが、十分に大きな有限系に対して同じ非ガウス型の確率分布関数(パラメータ $a = \pi/2$ の一般化ガンベル分布)に従うことを示した。その後の研究によれば、パーコレーション・モデルやイジング・モデル等の平衡臨界系、砂山崩しモデルや森林火災モデルなどの自己組織化臨界性を示す系においても、秩序変数やエネルギー散逸量などの揺らぎが、一般化ガンベル分布で表せることがわかっている。これらの長距離相関系は、臨界現象や自己組織化臨界など、平衡・非平衡に関わらず何らかの意味で“臨界”と関係している。一方、臨界現象の秩序変数に代表されるように、一般化ガンベル分布に従って揺らぐこれらの確率変数は、システムの何等かの“秩序”を表す統計量である。従って、上記の系に見られる共通性は、臨界系における秩序揺らぎの普遍的性質と考えることができる。しかし、これらの先行研究のほとんどが実験的・数値的なものばかりであるため、“一般化ガンベル分布は臨界秩序揺らぎを表す真の普遍分布か否か”という基本的問題や臨界秩序揺らぎと構造揺らぎの関係についても解明されていない。これらの未解決問題を解決することは、自然界に存在する様々なフラクタル構造の統計的性質を理解する上で極めて重要である。

本論文は、秩序揺らぎが一般化ガンベル分布に従うと考えられている有限サイズの平衡臨界系において、秩序変数とフラクタル次元の分布関数を理論的・数値的に調べることで、先にあげた未解決問題を解決することを目的としている。

本研究の結果、以下の事実が明らかとなった。(1) 臨界複雑ネットワークに対する数値計算により、スケールフリー性を有する系では臨界秩序変数揺らぎが一般化ガンベルに従わないことを示した。(2) 臨界秩序揺らぎが一般化ガンベル分布に従う系において、局所秩序変数の空間構造の揺ら

ぎ、すなわちフラクタル次元の分布関数の一般的表式を初めて解析的に導出した。(3) 臨界系におけるフラクタル次元の分布関数は、秩序揺らぎとは異なり、系の詳細に依存することを明らかにした。(4) 量子系と同様に、無限に大きな古典系の臨界点において、有限の割合で非フラクタル状態が存在することを示した。(5) 臨界における非フラクタル状態の存在は、フラクタル次元の分布関数に影響を与えないことを示した。

本論文は以下のように構成されている。1章は緒論であり、本論文の主題である長距離相関を有する複雑系における秩序揺らぎと構造揺らぎに関する研究の背景と問題点を概説している。2章では、1章で述べた背景や問題点を詳説した上で、改めて本論文の目的について述べている。3章では“一般化ガンベル分布は臨界秩序揺らぎを表す真の普遍分布か否か”という基本的問題に対して検討を行うため、臨界複雑ネットワークという特異な平衡臨界系(スケールフリー・ネットワークとランダム・グラフ)における秩序変数の揺らぎを大規模計算により調べた結果を示している。また、臨界スケールフリー・ネットワークでは秩序揺らぎが一般化ガンベル分布に従わない理由を考察している。4章では、臨界系における局所秩序変数の空間構造は常にフラクタルであるという仮定に基づいて、秩序変数が一般化ガンベル分布に従う有限サイズ平衡臨界系のフラクタル次元の分布関数を解析的に導出している。5章では、4章でフラクタル次元の分布関数を導出する際に用いた仮定の正当性を評価するため、臨界系におけるフラクタル性の揺らぎについて検証を行っている。最終章では本論文の結論と、これからの課題が述べられている。

これを要するに著者は、多様な複雑系に潜む普遍的性質に対する新知見を得たものであり、自然に対する深い洞察のみならず、新奇機能性フラクタル材料の創製に重要な役割を果たすことを通して、応用物理学に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(工学)の学位を授与される資格あるものと認める。