博 士（理 学） 佐 藤 規 文

学 位 論 文 題 名

A simple proof of convergence of the Allen–Cahn equation to Brakke's motion and its application to the flow of two–phase fluid with surface tension

（Allen–Cahn 方程式の解の Brakke の平均曲率流への収束の直接証明及びその表面張力を含む 2 相流体問題への応用）

学位論文内容の要旨

Allen-Cahn 方程式（AC）とは、表面張力によって動く相境界の挙動を表すために 1979 年に導入されたものであり、その解の存在や収束などについて現在までに数多くの研究結果が存在する。その中で、1993 年に Ilmanen は AC の解によって構成される Radon 測度が Brakke の平均曲率流に収束する、すなわち AC の解から現れる Radon 測度の極限が Brakke の不等式を満たすということを幾何学的測度論による手法を用いて証明した。具体的には、まず単調性公式と呼ばれる不等式を示し、これを用いて clearing-out lemma、density lower bound などのいくつかの補題を示し、AC の解による測度に対応する discrepancy measure という Radon 測度の収束を示した上で、最終的に AC の解からなる測度が Brakke の平均曲率流に収束することを示した。

本論文は全部で 2 つの章からなる。まず第 1 章では、上記の Ilmanen の結果を、単調性公式を用いずに証明する。単調性公式及びこれによって導かれたいくつかの補題を用いずに、AC の解からなる測度が Brakke の平均曲率流に収束することを直接的に示す。この証明において重要な役割を果たすのが、2006 年の Röger と Schätzle による結果である。これは De Giorgi の modified conjecture に関する研究の中で証明されたものであるが、この結果を使うことによって discrepancy measure の収束を前述のいくつかの補題を使うことなく証明でき、さらに具体的な計算量を大幅に軽減することができる。ただし、彼らの結果は空間次元が 2 または 3 の場合に限られるため、本章での直接的な証明も空間次元が 2 または 3 の場合に限られる。

次に第 2 章では、この手法を相境界の曲率による効果を考慮した 2 相流体問題へ応用する。具体的には、相境界の挙動が流体の流速だけでなく相境界自身の平均曲率にも依存する下での非圧縮粘性 2 相流体の時間発展問題において、measure-valued solution と呼ばれる解の存在を証明し、同時に相境界が Brakke の平均曲率流に近い挙動を表す、つまり相境界が Brakke 型の不等式の積分形を満たすことを証明する。なお、本研究では拡散効果がより強い non-Newtonian と呼ばれる性質をもつ流体について考える。このような流体に対しては、例えば相境界の振る舞いについて自身の平均曲率を考慮しない場合に、measure-valued solution の存在が 2007 年に Abels によって証明されている。また、Newtonian である流体に対しては、相境界の振る舞いに自身の平均曲率が影響を与える状況下で、時間局所的な古典解の存在が同じく 2007 年に前川によって証明されている。

具体的な証明方法については、この 2 相流体問題を phase-field 法による近似を用いて Navier-Stokes 方程式と AC の連立で表し、この方程式系の弱解を Galerkin 法によって構成

する。そして、この弱解が measure-valued solution に収束することを示し、さらにこの弱解によって構成される相境界を近似する Radon 測度の極限、すなわち本来の相境界が Brakke の不等式の積分形を満たすことを示す。この不等式が成り立つことを示す際に、相境界上での流速場の積分を制御することが問題となるが、それについては 1977 年に Meyers と Ziemer によって示された不等式を使うことでその点を解消している。また、途中の計算について再度 Röger と Schätzle による結果を適用することで、計算量を軽減している。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　利根川　吉　廣
副　査　　教　授　　中　村　　　玄
副　査　　教　授　　神　保　秀　一

学 位 論 文 題 名

A simple proof of convergence of theAllen-Cahn equation to Brakke's motion and its application to the flow of two-phase fluid with surface tension

（Allen-Cahn 方程式の解の Brakke の平均曲率流への収束の直接証明及びその表面張力を含む２相流体問題への応用）

学位論文の研究対象である Allen-Cahn 方程式は、表面張力によって動く相分離境界をモデル化したもので、数理物理モデル的な観点と数学的な観点の両方から多くの研究があるのみでなく、数値計算的にも極めて多用されている重要な方程式である．この方程式には拡散相分離境界の厚みオーダーを表すパラメターが入っているが、このパラメターの零極限、つまり拡散零極限における界面の動きが平均曲率流になる事が 1980 年代から 1990 年代にかけて、粘性解の理論や幾何学的測度論を援用する事により証明されている．一方、最も一般的な仮定の下に示されている結果である 1993 年の Ilmanen の結果は極めて長くて複雑な証明を必要としていたためにその後の応用についての進展がなかったが、本学位論文において佐藤君は Ilmanen の証明を 10 ページ以下にまで単純化およびさらなる一般化に成功しており、第一章はその説明及び証明にあてられている．第二章は自由界面によって分離された２相流体問題についてである．２相流体の解の存在問題は古くから研究されているものであるが、Navier-Stokes 方程式の解である流速場が時間大域的には滑らかである保障は無い為に満足な存在定理は未だに得られていない困難な問題である．典型的には(1)極めて滑らかなクラスにおける時間局所解の構成、および(2)極めて弱い意味で定義された自由界面と流速場の設定での時間大域解の構成、の２つが以前から示されている．この問題について第２章ではある意味で(1)と(2)の折衷であるような結果を示す事に成功している．すなわち時間は大域的でありながら、自由境界は測度論的に連続微分可能なクラスに入っている２相流体の解を構成することに本学位論文では成功している．問題の設定としては、自由界面の運動速度が、流体の移流速度と定数×界面の平均曲率ベクトルとの和になっていると考える．また流体は自由境界の表面張力による圧力不連続性を持つものとする．流体の粘性によって強い流速勾配評価が得られる設定に限るのではあるが、その場合は自由界面がフラクタルのような構造が起こることを表面張力によって抑制可能であるということをエッセンスとして得ており、結果は界面表面張力と流体が相互作用する

2 相流体問題についての革新的な存在定理といえるもので、2 相流体問題に関する一連の歴史的な結果の中でも特記されるものである．よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める．