

学位論文題名

Mathematical Analysis of Singular Diffusion Equations with Constraints

(束縛条件つきの特異拡散方程式に関する研究)

学位論文内容の要旨

本論文では物理学・工学への応用が期待されている特異拡散方程式、特に 1-調和写像方程式と呼ばれる方程式にさまざまな束縛条件を課した問題に関する研究を扱っている。まず、この 1-調和写像流方程式の表す物理的モデルや実社会での工学面への応用などについて述べる。本論文の第 2～3 章で扱っている問題、すなわち方程式の解の値のとり範囲を球面に制限して考えた場合には、例えば画像処理における(ノイズなどのある画像データの)整形のプロセスを記述している。このときにはさまざまな画像処理の手法のうち、色調と呼ばれる色の 3 原色の比を修正する方法になっている。また、第 4～5 章で扱っているよう問題、すなわち方程式に非斉次項とよばれるファクターを与えた場合には、結晶成長を記述したモデルとして提唱されている。特に、平面上で既にすべて固体になった後に結晶が回転しながらくっついていく様子を表している方程式(実際にはモデルは複数の方程式の連立で表されるのでその 1 つ)と考えられている。

この 1-調和写像流方程式と呼ばれる特異拡散方程式は、方程式において分母が 0 となる特異点における特異性が非常に強く、数学的には特別な場合にしか結果が得られていない。また数値計算・数値実験を直接行うこともできない。そこでその突破口として、ある条件下(これは物理モデル的には不自然な仮定ではない)では空間変数に関して局所定数関数(階段関数)となるような解を考えることができることを示すことにより、問題を偏微分方程式から常微分方程式系に書き直して数学的な解析を行いやすくした。このことにより、解の挙動・振る舞いを考察でき、また適切な近似問題を設定することにより妥当性が保証された数値計算を実行することが可能となった。このようにある仮定のもとではあるが、これまであまり結果が得られていない問題にアプローチする手法を構成できたことが本論文の主結果である。数学的には 1-調和写像流方程式は p -調和写像流方程式と呼ばれる方程式の $p=1$ の場合である。そのことを利用したアプローチもこれまでに多くの研究者によってなされているが、それらよりも限定された状況下であるとはいえ、より簡単に解析できたことは本研究の意義であると思う。

次に本論文の具体的な内容について述べる。第 1 章では後に必要となる事柄、特に有界変動関数の定義とその性質、および極大単調作用素と凸関数の劣微分で表される方程式

の可解性などを中心にまとめた。第2章では $p=1$ の場合と $p=2$ の場合の調和写像流方程式では同じ条件下でも解の挙動が大きく異なるものの例を考察した。具体的にはある初期条件・境界条件のもとでは $p=2$ のときは時間大域的な滑らかな解が存在するが、 $p=1$ のときは滑らかさが有限時刻で失われてしまうことを証明した。第3章では値域を球面に制限した斉次方程式の場合に、方程式をエネルギー汎関数の勾配流として定式化し、初期値が局所定数関数ならば1-調和写像流方程式の解も局所定数関数であることを証明した。第4章では値域は制限しないが非斉次項がある場合に、その非斉次項がある条件を満たしていれば第3章と同じように局所定数関数の形の解を考察することができることを証明し、さらに時間定常解の具体的な形を決定した。第5章では特異性を解消した適切な近似問題を構成し、その近似問題の解がもとの1-調和写像流方程式の解に収束することを証明した。さらにその近似問題の数値計算の例をいくつか挙げ、第4章で説明した時間定常解への収束の様子を考察した。これまでの既知の結果では近似問題のもとの問題への収束を厳密に説明しているものは少なく、本論文ではその点も数学的に証明したことが特徴的である。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 利根川 吉 廣

副 査 教 授 高 岡 秀 夫

副 査 准教授 津田谷 公 利

副 査 准教授 山 崎 教 昭 (室蘭工業大学・共通講座)

学 位 論 文 題 名

Mathematical Analysis of Singular Diffusion Equations with Constraints

(束縛条件付きの特異拡散方程式に関する研究)

本論文は、カラー画像処理問題や結晶粒界問題を記述する数理モデルの解析的研究である。カラー画像中のノイズが除去されるとき、時間変化や結晶の角度の時間変化を、物理的状态を測る関数の挙動によって調べようとしている。

本論文は、上記の動機の下に、これらをヒルベルト空間における抽象発展方程式の立場から論じているが、次の点で高く評価できる。

(カラー画像処理問題に対する解析手法の確立)

カラー画像処理問題においては、画像の色調や輪郭を保ちながらノイズを除去したいため、その数理モデルは全変動流方程式となる。それを解析する手法はこれまでになかったが、全変動流方程式を離散常微分方程式系で近似する手法を提案し、解の存在を示すことに成功した。この手法は、全く新しい発想であり興味深い。

(結晶粒界の角度を記述する異方性特異拡散方程式の解析)

結晶粒界の角度を記述する異方性特異拡散方程式の解析には、ヒルベルト空間における凸関数の劣微分作用素論が有効であることに着目し、弱解の存在・一意性、定常解の存在と構造を示すことに成功した。ディリクレ境界条件の場合、エネルギー全変動汎関数の劣微分の扱いが非常に難しいが、境界条件を満たす解の存在とその構造 (区分的定数値解の存在) や定常解が一意になる条件を明らかにした点は、極めて高く評価できる。

本論文は5章からなり、1章は既に得られた理論のまとめであるが、2章から5章まで、いずれもオリジナルな結果を含んでいる。それらは方法論的にも数々の新しい知見を与えるものであり、今後のこれらの分野の新展開に大いに貢献するものである。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格があるものと認める。