

## 学位論文題名

## On F-thresholds and F-jumping coefficients

(F-閾値と F-跳躍数に関して)

## 学位論文内容の要旨

標数 0 の代数多様体の極小モデル問題を考えるときに扱う特異性は、正標数への還元を行うことで、正標数の可換代数の (より詳しく書くとフロベニウス写像を用いて定義される密着閉包論の) 言葉で (一部) 表現することが可能である。これを踏まえ、以下の三つの研究アプローチが存在する。一つ目は、"一部" しか表現されていない標数 0 の幾何学的対象と正標数の可換代数の対象との間の対応をより強固にすること。 (つまり、標数 0 の代数多様体の特異点論の対象と正標数の可換環の密着閉包論との対応自体の研究。) 二つ目は、その対応を利用して、標数 0 の特異点論の対象 (及び特異性) の類似となるような、対象 (及び特異性) を密着閉包論の側に創出していくこと。 (つまり標数 0 側から正標数側への応用。) 最後は、その対応を逆向きに利用して、標数 0 の特異点論の性質を一旦正標数に還元し、密着閉包論の議論を用いて導き出すこと。 (つまり正標数側から標数 0 への応用。)

本論文で扱う F-跳躍数は、正標数の可換環上のイデアルに関して定まる不変量で、そのイデアルの判定イデアルの跳躍数になっている。上で言うところの第一アプローチに属す結果から、判定イデアルは標数 0 の代数多様体の閉部分多様体に関して定まる乗数イデアルを正標数に還元したものと一致する。このことから、F-跳躍数は乗数イデアルの跳躍数の正標数類似とみなせ、第二アプローチの研究の中で定義された。

F-閾値も正標数の可換環上のイデアルに関して定まる不変量である。正標数の正則な環上では任意のイデアルに関して F-閾値と F-跳躍数は一致することが知られている。これは、F-閾値が非正則な環上では、(標数 0 側の対応物がないという点で) 幾何学的な不変量と見なせないことも意味している。また非正則環上では F-閾値の計算自体が困難なものになっている。

本論文では、密着閉包論と特異点論に関連する定義や命題を確認した後、正標数のトーリック環上の単項式イデアルに関する F-閾値と F-跳躍数を研究した。まず本論文では、Mustata-高木-渡辺の論文の例に挙げられている多項式環上の単項式イデアルに関する F-閾値の組合せ論的な計算方法を一般のトーリック環上のそれに拡張した。その計算方法を用いて、一般のトーリック環上の単項式イデアルに関して、F-閾値は常に F-跳躍数以上の値を取ることを示した。またゴーレンシュタイン特異点を持つトーリック環ならば、F-閾値と F-跳躍数が一致するイデアルを構成することが可能であることを示した。このようなイデアルを、3 次元以上の  $\mathbb{Q}$ -ゴーレンシュタイン環で発見することにも成功した。逆に高々  $\mathbb{Q}$ -ゴーレンシュタイン特異点を持つ単体的錐で定義されたトーリック環ならば、ある単項式イデアルの F-閾値と F-跳躍数の一致をみることで、その環の正則性を判定できることも示した。これらは、F-閾値という標数 0 の対応物をもたない不変量を利用してその環の幾何学的な特異性 (正則性) を調べるという意味で、第三アプローチに属す結果である。

また、本論文では F-閾値が有理数となることを特定のトーリック環上で示した。特定のトーリック環上で F-跳躍数が有理数となることの別証明も与えた。標数 0 の代数多様体上の不変量である乗数イデアルの跳躍数が有理数となることは定義からほぼ明らかであるのに対して、その正標数類似と見なされる F-跳躍数 (と F-閾値) が有理数になることは明らかではない。F-跳躍数 (と F-閾値) の有理性は、標数 0 との対応を裏付ける第一アプローチの研究に属するものである。

# 学位論文審査の要旨

主 査 准教授 松 下 大 介  
副 査 教 授 中 村 郁  
副 査 教 授 寺 尾 宏 明

学 位 論 文 題 名

## On F-thresholds and F-jumping coefficients

(F-閾値と F-跳躍数に関して)

著者は標数正の体上定義された toric 多様体とその上のイデアル層に関する F 閾値および F 純閾値について研究し、二つの量の関係について興味深い結果を得た。以下詳細を述べる。標数正の体上定義された代数多様体は特異点解消が存在するかどうか未解決であるため、特に特異点を持つものに対しての性質は標数 0 の体上定義された代数多様体に比べてまだまだ未知である。一方、この種の多様体にはフロベニウス写像と呼ばれる写像があり、これを用いてその性質を調べることが盛んに行われている。典型的な例として、フロベニウス写像が平坦であれば、その多様体は非特異である、という Kunz の定理があげられる。この定理を発端とし、非特異性のみならず、特異性をもフロベニウス写像の性質で捉えようという試みの一つに Tight closure 理論があり、この理論を用いることで、標数 0 の体上定義された代数多様体に対するいくつかの概念を標数正のものの上に拡張することが出来る。その拡張された概念の中で、代数多様体の分類理論の観点から非常に重要であるものとして、F 正則特異点と F 純特異点の二つがあげられる。F 正則特異点および F 純特異点は代数多様体単独ではなく、代数多様体  $X$  とその上のイデアル層  $I$ 、および正の実数  $t$  の三つ組に対して定義される。 $X$ 、 $I$  を固定し、パラメーター  $t$  を大きくすることで、三つ組は  $t$  が 0 のときからある大きさまでは F 正則特異点のクラスに含まれるが、それ以降は F 純特異点のクラスに属する、というふうに変化してゆく。この変化する閾値を F 純閾値とよび、この値は特異点の不変量の一つであって、その値を具体的に調べることは非常に重要である。具体的な三つ組に対してこれらの値を実際に計算する場合、定義から直接導くことは一般に困難であり、Fedder の定理と呼ばれる言い換えを使って行われる。この定理を拡張する形で F 閾値と呼ばれる不変量がやはり代数多様体、イデアル層およびパラメーターの三つ組に対して定義された。F 閾値は土台となる  $X$  が非特異の場合には定義された当初から盛んに研究され、特筆すべき性質として、F 純閾値と F 閾値は等しいということが示され、F 閾値を通して、F 純閾値の性質が色々とわかった。しかしながら、土台となる代数多様体の特異点を持つ場合は F 閾値と F 純閾値の関係はほとんど調べられていなかった。申請者はこの状況下で、土台となる代数多様体を二項からなる代数方程式で定義される代数多様体である toric 多様体、その上のイデアル層として単項式で生成されるものを選び、F 閾値と F 純閾値について研究を行った。その結果としてこれらの三つ組に対する F 閾値の具体的な公式を求め、以下の成果を得た。

1. F 閾値による非特異な toric 多様体の特徴付け。
2. toric 多様体を定義する錐が単体的である場合、F 閾値は有理数。
3. Gorenstein 特異点を持つ環の標準イデアルに対する F 閾値と F 純閾値の等値性。

4.  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 特異点を持つ環で特異な性質を持つものの構成。

これら四つの成果は Tight closure 理論と標数正の代数多様体の分類理論の今後の発展に多いに寄与するものと考えられる。よって著者は北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格があるものと認める。