

学 位 論 文 題 名

非線形ダイナミカルシステムにおける固有値解析を用いた
Lyapunov 関数の構築法に関する研究

学位論文内容の要旨

ダイナミカルシステムの安定性解析に関する理論は、その必要性や有用性などを動機として従来より様々な形で発展してきた。システムに適切な入力を加えることで所望の状態や出力を得ようという目的の制御工学においても安定性理論は非常に重要である。なぜならば、対象となるシステムをどのような意味で安定とするのが制御工学における大きな問題設定となっているからである。

非線形ダイナミカルシステムの内部安定性についての理論においては、Lyapunov による理論が精力的に研究されている。この理論は広範囲なダイナミカルシステムに対して適用可能であり、時変系か時不変系か、集中定数系か分布定数系か、確定系か確率系か、そして、線形系か非線形系かに関わらず安定性判別が可能である。また、Lyapunov 安定論における安定判別法は極めて明快である。端的に述べるならば、ダイナミカルシステムの孤立平衡点に対して Lyapunov 関数と呼ばれる関数が存在すれば、当該システムの平衡点は安定である。また、同理論の有用な点はこれだけではなく、ほかの数多くの制御理論との相性が良いという点も挙げられる。例えば、最適レギュレータ問題において、制御則を決める値関数と呼ばれる関数は Lyapunov 関数となることが知られている。あるいは、ある制御システムの閉ループ系が Lyapunov 安定であるならば、対応する Lyapunov 関数は元の制御前のシステムに対する制御 Lyapunov 関数となる。この事実を用いれば逆最適制御設計が可能となるが、これはある意味で「より良い」制御則を導けるということである。このほか、消散性や入出力安定性に関する議論、ロバスト制御や適応制御などにも Lyapunov 安定論は顔を出す。

このように、多岐にわたって重要な役割を演じている Lyapunov 安定論だが、その中心部分において大きな未解決問題を孕んでいる。それはつまり、Lyapunov 関数をどのように構築できるか、という問題である。この問題についてはこれまで数多くの研究が為されてきた。著しい成果としては、例えば Krasovskii は Lyapunov 関数の候補を正定二次形式とすることで当該候補が真に Lyapunov 関数であるかを判別する手法を提案した。また、Schultz が示したのは正定関数の勾配を上手く構成することで Lyapunov 関数としての性質を持つようにする可変勾配法であった。Zubov は、Lyapunov 関数の時間導関数が負定となるという性質をもとに偏微分方程式を立て、逐次近似法を用いることで特定の条件を満たす解を Lyapunov 関数として得るという手法を確立した。更に、Zubov による手法は Vannelli and Vidyasagar により拡張され、近年では Camilli et al. によって摂動系、確率系、制御系に適用され改良された。

これらの有力な手法があるにも関わらず、Lyapunov 関数を構築する統一的な手法は未だ得られていない。また、不連続状態フィードバック制御則のような非解析的な関数を制御入力としなければならないようなシステムに対しては、不可微分な領域を持つ Lyapunov 関数を要求されることもあ

り, そのような場合において問題を解決できる手法が求められている。

本論文における主題は, 非線形ダイナミカルシステムにおける Lyapunov 関数構築問題に対する新しい解決法を模索することであり, これに関して差分近似法と確率過程論, および量子論的類推を用いた近似的な解決法を提案した。

本提案手法にて用いた近似手法は, まず差分法である。この手法そのものは至って簡素であり, 前進差分, 後退差分, および中心差分を採用した。これらを用いて非線形伊藤型確率微分方程式系の最適制御問題における支配方程式である Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を有限差分近似した Kushner にならない, Lyapunov 関数を求める為の Zubov による偏微分方程式 (Lyapunov 方程式) を差分近似した。

本論文ではさらに, 確定システムを確率システムとして取り扱った。そして, 非線形常微分方程式系における Lyapunov 方程式を, 連続時間離散状態の確率過程におけるマスター方程式であるとなしした。以上の経緯を経て, 確率過程を量子論的に取り扱った。この事実, すなわち, Kushner の手法から出発すると量子論的な類推が可能となるという点が, 本提案手法の理論展開において肝要な点である。なぜならば, 導出された量子論的方程式 (Schrödinger-like 方程式) の解は, ある可分複素 Hilbert 空間上のベクトルに作用する線形演算子の固有値および固有ベクトルを用いて表現されるからである。つまり, Lyapunov 方程式を解く問題が, Schrödinger-like 方程式の固有値問題を解く問題に帰着された。そして, この事実を用いて離散値を取る状態空間上における Lyapunov 関数を構築する手法を提案した。

また, 上述の議論は伊藤型確率微分方程式系に対しても同様の議論が可能であることを示した。ただし, 確率システムにおける Lyapunov 安定論は, 確定システムの場合とは異なるため, 問題設定について検討しなおす必要があった。なぜならば, 確定システムにおいて Lyapunov 安定または Lyapunov 漸近安定と呼んだ概念が, 確率システムにおいては一意に定まらなくなるからである。これはひとえに Wiener 過程による拡散項の影響であるが, 本論文ではこの問題に対する処方として, Kushner による確率漸近安定性に関する Lyapunov 安定定理を紹介し, それをもとに定義された確率的 Lyapunov 関数に対して本提案手法が適用可能であることを示した。

本論文ではさらに, 本提案手法における幾つかの利点について考察した。それらは主に, 境界条件を定めずとも計算ができる点, 時間に関する反復計算を行わない点, および, 解くべき問題が疎行列の固有値方程式となる点である。また, 本提案手法が有効であることを, 幾つかの単純なモデルに適用し数値計算することで示した。

以上をまとめると, 次のようになる。本論文では, 非線形ダイナミカルシステムである, 確定集中定数系および確率集中定数系に対する Lyapunov 関数を, Schrödinger-like 方程式における固有値および固有関数から導くという新手法を提案した。また, 同提案手法の有用性について考察し, 有効性について数値計算を行い検討した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 山 下 裕

副 査 教 授 小野里 雅 彦

副 査 教 授 金 井 理

副 査 准教授 石 動 善 久

学 位 論 文 題 名

非線形ダイナミカルシステムにおける固有値解析を用いた

Lyapunov 関数の構築法に関する研究

本論文では、非線形ダイナミカルシステムの Lyapunov 関数を構築する新手法が提案されている。

Lyapunov 関数は、システムの安定性を保証する関数である。Lyapunov 安定論は広範囲なダイナミカルシステムに対して適用可能であり、システムが時変系か時不変系か、集中定数系か分布定数系か、確定系か確率系か、そして、線形系か非線形系かに関わらず安定性判別が可能である。しかし、Lyapunov 関数をどのように構築できるか、という問題はいまだ未解決である。また、不連続状態フィードバック制御則のような非解析的な関数を制御入力としなければならないようなシステムに対しては、不可微分な領域を持つ Lyapunov 関数を要求されることもあり、そのような場合において問題を解決できる手法が求められている。本論文における主題は、非線形ダイナミカルシステムにおける Lyapunov 関数構築問題に対する新しい解決法を模索することであり、これに関して方向付き差分近似法と確率過程論、および量子論的アナロジーを用いた近似的な解決法が提案されている。

本提案手法にて用いた近似手法は、まず差分法であり、前進差分、後退差分、および中心差分が採用されている。これらを用いて非線形伊藤型確率微分方程式系の最適制御問題における支配方程式である Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を有限差分近似した Kushner にならい、Lyapunov 関数を求める為の Lyapunov 方程式を差分近似している。

本論文ではさらに、確定システムを確率システムとして取り扱っている。そして、非線形常微分方程式系における Lyapunov 方程式を、連続時間離散状態の確率過程におけるマスター方程式である とみなしている。以上の経緯を経て、確率過程を量子論的に取り扱っている。この、方向付き差分近似法から出発すると量子論的な類推が可能となるという点が、本提案手法の理論展開において肝要な点である。なぜならば、導出された量子論的方程式 (Schrödinger-like 方程式) の解は、ある可分複素 Hilbert 空間上のベクトルに作用する線形演算子の固有値および固有ベクトルを用いて表現されるからである。つまり、Lyapunov 方程式を解く問題が、Schrödinger-like 方程式の固有値問題を解く問題に帰着された。そして、この事実を用いて離散値を取る状態空間上における Lyapunov 関数を構築する手法を提案している。また、上述の議論は伊藤型確率微分方程式系に対しても同様の議論が可能であることが示されている。ただし、確率システムにおける Lyapunov 安定論は、確定システムの

場合とは異なるため、問題設定について検討しなおす必要がある。なぜならば、確定システムにおいて Lyapunov 安定または Lyapunov 漸近安定と呼んだ概念が、確率システムにおいては一意に定まらなくなるからである。これは Wiener 過程による拡散項の影響であるが、本論文ではこの問題に対する処方として、Kushner による確率漸近安定性に関する Lyapunov 安定定理を紹介し、それをもとに定義された確率的 Lyapunov 関数に対して本提案手法が適用可能であることを示している。

本論文ではさらに、本提案手法における幾つかの利点について考察している。それらは主に、境界条件を定めずとも計算ができる点、時間に関する反復計算を行わない点、および、解くべき問題が疎行列の固有値方程式となる点である。また、本提案手法が有効であることを、幾つかの単純なモデルに適用し数値計算することで示している。

本論文の構成は次のとおりである。まず、第一章および第二章では、基礎事項として、用語説明、確率過程論、Lyapunov 安定論および最適制御問題についてまとめられている。Lyapunov 安定論では確率システムにも触れられており、最適制御理論においては、Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程式の弱解として粘性解理論を用いることができることまで言及している。次に、第三章および第四章では本論文の主要テーマで用いる手法の説明がなされている。第三章では、方向付き差分近似法と、その有用な適用例である水平面劣駆動 2 リンクアームの安定化問題について述べられている。同システムは、非ホロノミックシステムと呼ばれるシステムであり、時不変の安定化器が不連続状態フィードバック則しか持たず、制御の難しいシステムとして知られている。第四章では、確率過程の量子化と呼ばれる手法を紹介している。これは、確率過程におけるマスター方程式を、量子力学的な方程式である Schrödinger-like 方程式に置換するという手法である。そして、第五章および第六章では本論文の主テーマである、非線形ダイナミカルシステムにおける固有値解析を用いた Lyapunov 関数の構築法が提案されている。第三章および第四章の手法を用いて、Lyapunov 方程式を Schrödinger-like 方程式として近似し、同方程式における線形演算子についての固有値および固有関数を重ね合わせることで Schrödinger-like 方程式の解を得ている。その後、得られた固有関数を適切に重ね合わせることで離散状態空間における Lyapunov 関数を構築する手法を提案している。なお、第五章では常微分方程式系を、第六章では伊藤型確率微分方程式系を、それぞれ対象としている。また、いずれの章においても簡単な数値例によって本提案手法の有用性が確認されている。第七章では考察と今後の展望が、第八章では結言が述べられている。

これを要するに、著者は確定系および確率系の Lyapunov 関数を Schrödinger-like 方程式の固有解析により求める新手法を提案したものであり、制御理論およびダイナミカルシステム理論の発展に寄与するところ大なるものがある。よって、著者は北海道大学博士 (情報科学) の学位を授与される資格あるものと認める。