

学位論文題名

PROLONGATIONS OF CANONICAL SYSTEMS ON JET SPACES

(ジェット空間の正準微分式系の延長)

学位論文内容の要旨

Engel, Goursat, Cartan らによって 1 未知関数 1 独立変数の k 階の jet 空間上の高階接触微分式系の特徴付けの研究がなされた. この微分式系はランクが 2 の微分式系でありその高階派生系のランクが一つずつ上がり k 階派生系が接空間全体に一致するという性質をもつ. 逆にこの性質を持つものを (長さ k の) Goursat flag と定義して jet 空間の特徴付けになると Goursat は肯定的に考えていた. しかし 1978 年に Giaro-Kumpera-Ruiz により否定的に解決された ([GKR]). つまり長さが 3 の Goursat flag はジェネリックには 3 階の jet だが特異点を持っている, これを彼らは指摘した. 一般に長さが 3 以上の Goursat flag は特異点を持つ.

これに対し m 未知関数 n 独立変数の 1 階の jet 空間に対しては 1979 年に Bryant([B]) が, m 未知関数 n 独立変数の高階の jet 空間に対しては 1982, 1983 年に Yamaguchi([Y1][Y2]) が特徴付けを与えた.

Goursat flag は jet ではない特異点を含んでいるが, ではそれはどのようなものなのか? という問いに対し 2001 年に Montgomery-Zhitomirskii が Goursat flag であるものは Monster Goursat Manifold (3 次元接触多様体から延長を繰り返して構成される多様体) にあらわれることを示した ([MZ]).

本研究では多未知関数多独立変数の jet 空間に対応する Monster Goursat Manifold がどのようなものであるかを明らかにした.

その候補は自然に考えられて, それは Yamaguchi による jet 空間のグラスマン構成 (ひとつ低階の jet 空間上の高階接触微分式系の fiber 方向に横断的な積分要素全体からなる空間を考え, 微分式系を定める構成) のときの横断性条件を落とし, 全ての積分要素を集めることを考える; すなわち m 未知関数 n 独立変数の k 階の jet 空間 $(J^k(m, n), C^k)$ に対し

$$\Sigma(J^k(m, n)) = \bigcup_{x \in J^k} \Sigma_x, \quad \Sigma_x := \{n - \dim \text{integral elements of } C^k\}$$

と定める.

このとき, 一般に $\Sigma(J^k(m, n))$ は variety になり, 多様体にならない.

$n = 1$ のときは特別でこの構成 ($n = 1$ のときは特にランク 1 延長と呼ばれる) でできたものは variety にならず多様体になり, またこの操作は繰り返し行うことができる. m 未知関数 1 独立変数の 1 階の jet 空間からランク 1 延長を繰り返して構成されるものが m 未知関数 1 独立変数の拡張された Monster Goursat Manifold になる, 特に $m = 1$ のとき

が元々 Montgomery-Zhitomirskii が Monster Goursat Manifold と呼んでいるものである. 拡張された Monster Goursat Manifold は m -flag になる. ここで m -flag とはランクが $m+1$ の微分式系でありその高階派生系のランクが m ずつ上がる性質をもつもので, さらに k 階派生系が接空間全体に一致するとき長さ k という.

これに対し本研究では Montgomery-Zhitomirskii の結果の拡張として m 未知関数 1 独立変数の拡張された Monster Goursat Manifold の特徴付けを (Cartan ランク, Engel ランクを用いて特徴付けることによって) 与えた ([SY]).

つぎに m 未知関数 n 独立変数の場合に対応する拡張された Monster Goursat Manifold を考えようとするとき $n = 1$ のときと本質的に違い, まず問題になるのが, 上でも述べたが, 一般に variety になり, 多様体にならないことである.

本研究ではこれに対し, $\Sigma(J^k(m, n))$ がいつ多様体になるかを明らかにした. ([S1], [S2]). すなわち自明な場合 (1 独立変数または 1 未知関数で 1 階の場合) 以外では 1 未知関数 2 独立変数の 2 階の jet 空間の接触微分式系の積分要素全体の集合だけが多様体になり, その他の場合は特異点を持ち多様体にならないということを示した.

この結果により 1 未知関数 2 独立変数の 2 階の jet 空間に対する延長または拡張された Monster Goursat Manifold を定義することができた.

またこの拡張された Monster Goursat Manifold は Goursat flag のときと同様にジェネリックには 1 未知関数 2 独立変数の 3 階の jet 空間を含んでいるが特異点を持っている.

これに対し余次元 1, 余次元 2 の積分要素, さらに余次元 2 の積分要素は双曲的, 放物的, 楕円の積分要素に分類して, それに対応して本質的に 4 つの特異点があらわれることを田中理論を用いて明らかにし, さらに各特異点に対し標準座標系を与えた ([S2]).

参考文献

- [B] Bryant, R. : Some aspect of the local and global theory of Pfaffian systems, Thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, 1979.
- [GKR] Giaro, A., Kumpera, A. et Ruiz, C.: Sur la lecture correcte d'un resultat d'Elie Cartan, C.R.Acad.Sc.Paris, **287**, Sér.A(1978), 241-244.
- [MZ] Montgomery, R. and Zhitomirskii, M.: Geometric approach to Goursat flags, Ann.Inst. H.Poincaré-AN **18**(2001), 459-493.
- [S1] Shibuya, K. : A set of integral elements of higher order jet spaces, to appear.
- [S2] Shibuya, K. : On the prolongation of 2-jet space of 2 independent and 1 dependent variables, to appear.
- [SY] Shibuya, K. and Yamaguchi, K.: Drapeau theorem for differential systems, to appear.
- [Y1] Yamaguchi, K.: Contact geometry of higher order, Japan.J.Math **8**(1982), 109-176.
- [Y2] Yamaguchi, K.: Geometrization of jet bundles, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 27-40.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 山 口 佳 三
副 査 教 授 泉 屋 周 一
副 査 教 授 石 川 剛 郎

学 位 論 文 題 名

PROLONGATIONS OF CANONICAL SYSTEMS ON JET SPACES

(ジェット空間の正準微分式系の延長)

1 独立 1 従属変数のジェット空間上の接触微分式系の特徴付けとして、古典的に Goursat Flag によるものが知られていた。Goursat Flag とはランク 2 の微分式系 (パッフ系) であって、その高階派生系のランクが 1 ずつ上がるものと定義される。k 次の派生系が接空間全体と一致する時、Goursat Flag は長さ k であるという。Goursat Flag による接触微分式系の特徴付けはジェネリックなものであり、一般に、長さが 3 以上の Goursat Flag は特異点を持つ。一方、 m 未知関数 n 独立変数の 1 階のジェット空間に対しては、1979 年に R.L.Bryant が、 m 未知関数 n 独立変数の高階のジェット空間に対しては、1982,83 年に K.Yamaguchi がその接触微分式系の特徴付けを与えた。長さが 3 の Goursat Flag に対して、特異点が生じる事実は 1978 年に、Giaro-Kumpera-Ruiz によって初めて明示的に示された。これに対して、2001 年に、Montgomery-Zhitomirskii は Monster Goursat manifold を構成し、すべての Goursat Flag は局所的には、Monster Goursat manifold の一部と局所同型となることを示した。これに対して、申請者は、1 独立 m 従属変数の 1 階ジェット空間よりランク 1 延長によって構成される、(その高階派生系のランクが m ずつ上がる) 長さ k の m -Flag をカルタン階数ないしエンゲル階数によって特徴付けて、Montgomery-Zhitomirskii の仕事を拡張した。

基本的に、この問題は、ジェット空間上の接触微分式系の特徴付けに係わる問題である。微分式系として、高階の接触微分式系は一つ低階の接触微分式系の積分要素を集めた空間に定義される微分式系となるが、ジェット空間の構成にはこの積分要素に自然な横断性条件が付く。1 独立変数の場合に、この横断性条件を無

視して得られたのが Monster manifold である。この観点から、申請者は、さらに、多独立変数の場合にこれが、いつ可能であるかを見極めた：すなわち m 未知関数 n 独立変数の k 階の jet 空間 $(J^k(m, n), C^k)$ に対し

$$\Sigma(J^k(m, n)) = \bigcup_{x \in J^k} \Sigma_x, \quad \Sigma_x := \{n - \dim \text{ integral elements of } C^k\}$$

と定める。

このとき、一般に $\Sigma(J^k(m, n))$ は variety になり、多様体にならない。

申請者は、本論文において、この $\Sigma(J^k(m, n))$ が多様体となるのは、これまで知られた場合（上にあげた 1 独立変数の場合と 1 従属変数 1 階の場合）を除けば、2 独立 1 従属変数の 2 階ジェット空間の場合のみであり、他の場合には、必然的に積分要素全体の空間に特異点が生じることを示した。さらに、この $\Sigma(J^2(1, 2))$ は、Goursat Flag と同様に、ジェネリックには 1 未知関数 2 独立変数の 3 階のジェット空間を含んでいるが特異点を持っている。申請者はこの特異点の状況を調べ、余次元 1、余次元 2 の積分要素、さらに余次元 2 の積分要素は双曲的、放物的、楕円の積分要素に分類できることを示し、各特異点に対して標準座標を与えた。

学位申請論文で得られた結果は、Goursat Flag の拡張を与えたのみならず、多変数化の新局面を開拓したものといえる。

審査員一同は、申請者が北海道大学博士 (理学) の学位を授与されるに十分な資格を有するものと認める。