学位論文題名

Intermittent switching for three repulsively coupled oscillators

(反発的結合三振動子系における間欠的遷移現象)

学位論文内容の要旨

複数の非線形振動子を結合した系は結合振動子系とよばれ、化学反応系、ニューラルネットワーク、真性粘菌や心筋細胞や動物の歩行にみられるリズムや空間的なパターン形成のモデルとして広く研究されている。ここでいう「振動子」とは自励的に周期解を示す常微分方程式系であり、「結合する」とは、個々の振動子が自分以外の振動子と相互作用をするということを表す。理論的、数値的な研究により三振動子系は様々な振動パターンがあらわれることが知られており、また一方では、実験系において三つの反応槽を対称につないだ化学振動子系[2]、粘菌で満たされた三つの容器をつないだ粘菌振動子系[3]において対称分岐理論から予測される多様な振動現象が観測されており、時間変化とともに振動パターンを移り変わるという現象が報告されている。本研究の目的は、三振動子において振動パターンを移り変わる現象を示す単純な方程式を示し、その分岐構造や大域的な構造を明らかにすることにある。そのために3つの同一な Stuart-Landau 方程式をリング状に結合した系を考え、その系の解の分岐構造、及びカオス的な解の遷移を研究した。ただし、結合はそれぞれの要素が反発しあうようにとった。反発的結合は、要素同士が同一の値をとることを妨げる(フラストレーション) 為に選んだものである。上に挙げた粘菌振動子の結合系などのように全体の体積が一定であろうとするような系もフラストレーションを持つ系である。

Stuart-Landau 方程式は複素変数の時間に関する常微分方程式であり、その軌跡は複素平面上の点の運動として表すことができる。この方程式は Hopf 分岐を示す標準系でもあり、原点を中心とした円周上に安定な周期解をもつ場合(limit cycle case) と、原点上に安定な平衡点をもつ場合(inactive case)に分けられる。

我々は limit cycle の場合と inactive の場合のそれぞれについて、パラメータを変化させることによりどのような振動パターンが現れるかを調べた。ただし、変化させるパラメータは、角速度の振幅依存性 β と振動子間の相互作用の大きさ(結合強度) κ とした。多様な周期解、準周期の分岐構造を数値的に検証し、幾つかの対称性の高い解については解析的に線形安定性を評価した。主な結果は以下の通りである。

- (1) 振幅依存性のパラメータが十分小さい場合は、お互いが $1/3$ 周期ずつずれて振動するような周期解しか安定に存在しないが、ある程度以上パラメータを上げると、多様な振動パターンを示すことがわかった。このことから、Stuart-Landau 方程式系においては振幅依存性は系の定性的振る舞いを支配する重要な要素の一つで

あることがわかった。

- (2) ある対称性を持つ3つのお互いに対称なトーラス(S2 トーラス)がサブクリティカルな熊手分岐により同時に不安定化し、その後軌跡がそのトーラス間を間欠的に移り変わるような解が現れることを数値的に示した。
- (3) 上で述べたものとは別のパラメータ領域において、トーラスからカオス、またカオス同士が融合していくことを確認した。具体的には、(i)三つのS2 トーラスが対称性破壊分岐後それぞれ二つの非対称なトーラスとなる。(ii) それら6つのトーラスが period-doubling 分岐を繰り返すことによりカオスとなる。(iii) そのアトラクター同士が attractor-merging crisis を起こすことにより融合をしていき、アトラクター数が $6 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ と変化していく。Attractor-merging crisis 後には融合前に存在していたアトラクター間を時間変化と共に移り変わること (crisis-induced intermittency) を数値的に示した。

これらの結果に加えて、(2)と(3)によって見られた遷移はパラメータを逆向きに変化させると、ある共通のアトラクターが急激に壊れる場合と、順を追って分裂して壊れていく場合に対応することを検証した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 西 浦 廉 政

副 査 教 授 中 村 玄

副 査 教 授 神 保 秀 一

学 位 論 文 題 名

Intermittent switching for three repulsively coupled oscillators

(反発的結合三振動子系における間欠的遷移現象)

結合振動子系は、ホタルの集団発火、化学反応系、ニューラルネットワーク、心筋細胞に現れる、同期現象などの幅広い現象を示すモデルとして、広く研究が行われている。多くの研究は、振動子同士が協調して振動するような同期現象に主眼が置かれているが、対象とする系によっては他にも様々な対称性を持つ振動パターンやカオス的な振る舞いを示すことが知られている。近年、粘菌振動子を三つ結合した実験系において、複数の振動状態を時間変化とともに遷移することが報告されている。この現象を生み出す仕組みについては、ノイズによる状態間の遷移、カオスの遍歴といった、いくつかの候補があったが、実際に解の遷移現象を再現するような三振動子のモデル方程式はこれまで提案されていなかった。申請者の研究は、解の遷移現象を示す単純なモデル方程式を作り、その分岐構造を明らかにすることにより、遷移状態へといたるまでのシナリオをつくることを目的としたものである。本研究においては単純な振動子である Stuart-Landau 方程式を用い、それらを反発的に結合するモデル方程式を考え、振動子の位相速度の振幅依存性が大きい状態では状態間を時間的に遷移する解が現れることを明らかにし、二通りの遷移現象へと到る分岐のシナリオを得た。

研究の詳細は以下の通りである。同一な Stuart-Landau 方程式を三つ反発的に結合した系をリング状に結合した系を考え、その系の解の分岐構造、及びカオス的な解の遷移を研究した。反発的結合は、要素同士が同一の値をとることを妨げる効果がある。これは一見、不自然な設定のように見えるが粘菌振動子のように全体の体積が一定であろうとするような系の結合を表すためには単純かつ自然な設定であるといえる。Stuart-Landau 方程式は複素変数 z に関する常微分方程式として表され、この方程式は Hopf 分岐を示す標準系でもあり、原点を中心とした円周上に安定な周期解をもつ場合 (limit cycle case) と、原点上に安定な平衡点をもつ場合 (inactive case) に分けられる。このそれぞれの場合について、結合強度と振幅依存性の二つのパラメータを変化させ分岐構造を調べた。まず、第一の結果として、振幅依存性の大きさにより現れる解が大きく変わることが挙げられる。振幅依存性が小さい場合は、三相解 (お互いが $1/3$ 周期ずれて振動するような周期解) しか安定に存在しないが、ある程度以上パラメータを上げると、多様な振動パターンを示すことがわかった。このことから、Stuart-Landau 方程式系においては振幅依存性は系の定性的振る舞いを支配する重要な要素の一つであることがわかった。また、limit cycle の場合と inactive の場合のそれぞれについて遷移現象へと到る別の分岐のシナリオを得た。一つ目のシナリオは、三つの同じ対称性を持つトラスが不安定化を起こすことにより、

それらの間を間欠的に遷移するような解が現れるというものであり、これは個々の振動子が limit-cycle を持たない場合 (inactive な場合) に現れる。二つ目のシナリオは limit-cycle 振動子の場合にみられ、三つのトーラスが熊手型分岐により六つの非対称なトーラスとなり、それぞれの非対称なトーラスが Period doubling cascade を通してカオスになり、さらにパラメータを変化させることによりそれぞれのカオスが attractor-merging crisis を通して融合していくことによりその数を6つから3つ、3つから1つと変化させていくものである。このカオスが徐々に融合していく過程は、力学系の分野からみても大変興味深いものであり、アトラクターは融合するに従いその対称性を上げていくということが、秩序変数を用いた数値計算によりわかった。

以上の結果は、時間的な解の遷移現象を起こすためには、それぞれの素子がカオスの挙動を示すカオス振動子や、外部から印加されるノイズは必要がなく、周期的な振る舞いを示す振動子が強い振幅依存性を持っていればよいという新たな知見を明確に示したものであり、振動パターンの遷移現象の数理的解明に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。