

学位論文題名

Study on Spin Systems on Scale-free Networks with Tree-like Structures

(ツリー構造を伴ったスケールフリーネットワーク上の
スピン系に関する研究)

学位論文内容の要旨

ネットワークは実世界に見られる関係性(例えばWWWの構造や人間関係、food-web)を頂点(ホームページ、人、生物に相当)の集まりと、頂点間を結ぶ辺(リンク関係、友人関係、捕食関係に相当)によって記述する。ある頂点が他の頂点との間に持つ辺の数をその頂点の次数と定義するとき、スケールフリーネットワーク(SFN)とは次数 k の分布がべき分布 $P(k) \propto k^{-\gamma}$ を満たすようなネットワークを意味する。近年SFNは自然界、人間社会で広く認められるネットワーク構造であることがわかり、研究は物理学、生物学から社会科学まで多岐に亘る分野で盛んに行なわれている。そのなかで本論文が行った研究とはSFN上のスピン系、特にイジングモデルの解析である。SFN上のスピン系の解析は人間社会における意見形成のモデルとして扱うことができる等応用の面で重要なだけでなく、ネットワークトポロジーとその上で起こる協力現象の関係を明らかにするものとして、統計物理の基礎研究の側面においても非常に重要なものといえる。

SFN上のスピン系の解析はこれまで幾つかのSFNモデル～SF Bethe lattice (SBL) やgrowing random network(GRN)モデル～を用いて行われてきた。ここでSBLはべき分布に従うランダムな分岐過程から作られる無限に延びたツリーである。GRNモデルとは単位時間ごとにネットワークに一定の本数の辺を携えた新しい頂点が追加され、既存のある頂点が辺の接続先に選ばれる確率は次数に依存する関数 A_k に拠る、というルールで作られたネットワークである。例えば $A_k = 1$ の場合(ランダム選択)、新規頂点はランダムに相手を選び、結果次数分布はポアソン分布を満たす。一方 $A_k = k$ の場合(優先的選択)、新規頂点は次数の高い頂点ほど相手に選びやすい形となり、結果べき指数 $\gamma = 3$ のSFNが実現される。GRNモデルの平均場的扱い及びSBL上のイジングモデルの解析から、SFN上のスピン系は次数分布のべき指数 γ に応じてその振舞いを変え、 $\gamma > 3$ では有限温度の相転移を起こすが、 $\gamma \leq 3$ ではスピンは常にオーダーしているという興味深い性質がこれまでに明らかとなった。しかしこれまでの研究で考慮されなかった性質の中で、系全体の振舞いを変えてしまう要素として本研究が着目したのが「次数1の頂点(leaf)の効果」である。理論解析・数値計算いずれの先行研究においても、解析の不便のためネットワークにおいてleafはないと仮定している。しかし現実に現れるSFNの多くは膨大なleafを含んでおり、leafからの寄与も考えたときSFN上の協力現象は既存の結果とは全く異なった様相を示すことが考えられる。本研究の目的は「leaf付SFNにおけるスピン系の振舞いを調べることでleafのない場合とどう異なるかを調べ、ネットワーク研究におけるleafの考慮の必要性を検討する」ことにある。本研究では一番簡単なモデルとしてループのない二つのSFNモデルを用い、leafの影響を調べた。具体的には以下の結果が本研究によって得られた:

(1)最初にべき分布に従うランダム分岐過程で作られる Cayley tree (以後 SCT)上のイジングモデル、及びポッツモデルの解析を行った。SCT は SBL において、根となる頂点から一定の距離にある頂点を全て leaf に置き換えたものに当たる。我々は規則的な分岐構造の Cayley tree において分配関数の recursion relation から磁化を導出した Stosic らの方法をランダムな分岐の場合に拡張し、SCT 上の零磁場強磁性イジングモデルにおける系の磁化の厳密な表式を導出することに成功した。その結果 $\gamma \leq 3$ において SBL では常に磁化するという結果であったのに対し、SCT では γ の値によらず自発磁化はどの有限温度でも存在しないことが明らかとなった。

さらに、recursive に分配関数を計算する方法を推し進めることで各世代のスピンの零磁場感受率の厳密な表式を得ることに成功した。その表式から、SCT 上のイジング系はある温度以下で感受率が発散し続ける振舞いをみせるが、(i) $\gamma > 3$ においてその発散を始める温度は内奥部(根側)と周辺部(leaf 側)では感受率の発散を始める温度が異なること、(ii) $\gamma \leq 3$ では場所の内外に寄らず感受率は全ての有限温度で発散していることが明らかとなった。この $\gamma \leq 3$ における「全ての有限温度で感受率が発散」は SBL における「常に磁化している」という結果と呼応するものである。また、(i) の結果は系全体のパラメータでは系内部の性質を捉えきれないことを意味している。今回用いた各スピンの感受率の導出法は、非常に一般的なものであり、ポッツモデルにも拡張された。その結果、SCT におけるポッツモデルにおける各スピンの感受率の厳密な表式が与えられ、その振舞いはイジング系と同様のものであることが明らかとなった。これらの結果はネットワークが leaf に含まれているか否かで、熱力学的極限での系の振舞いが全く異なる例を提示した点で重要といえる。

(2)次に我々はGRNモデルにおけるイジングモデルの振舞いを調べた。考えたのは新規参入の頂点が携える辺の数が 1 本のみの場合である。この時GRNモデルはSCTとは異なり、ネットワーク内の様々な場所にleafが存在する形のツリー構造をとる。まず我々はランダム選択の場合を調べた。行列要素 D_{ij} が頂点 i と j の間の最短パス数を示す行列(distance matrix)を用いて、系の感受率のネットワークの成長に伴う変化を漸化式の形で記述し、graph realizationに関する平均操作後漸化式を解くことで、任意のネットワークサイズにおける系の感受率の厳密な表式を求めることに成功した。さらに得られた表式から感受率発散温度を解析的に求め、ランダム選択下のGRNツリーの感受率の発散を始める温度が有限であることを明らかにした。次に優先的選択の場合の系の感受率の様子を、数値計算を用いて調べた。結果ランダム選択の場合とは異なり、系の感受率はネットワークの成長に伴い全ての温度で発散に向かうことが明らかとなった。加えて数値計算の結果は、優先的選択を伴った成長過程における系のサイズ N と系の感受率 χ の間に、これまでに知られていない関係式があることを明らかにした:

$$\chi(N, T) = f(T)^{\text{Log}(N)}$$

ここで T は温度、 $f(T)$ はスケール関数である。この関係式は SFN のある種の自己相似性を意味するものであり興味深い。

以上、本研究はこれまでは着目されていなかった SFN における leaf の効果を、特に感受率の発散の振舞いから明らかにした。

学位論文審査の要旨

主査 准教授 根本 幸児
副査 教授 大川 房義
副査 教授 網塚 浩
副査 准教授 矢久保 考介 (工学研究科)

学位論文題名

Study on Spin Systems on Scale-free Networks with Tree-like Structures

(ツリー構造を伴ったスケールフリーネットワーク上の
スピン系に関する研究)

本論文は木構造を持つスケールフリーネットワーク上のスピン系の協力現象を研究対象としている。スケールフリーネットワークとは次数が冪分布に従っているグラフを指すが、近年、自然界や人間社会で広く認められるネットワーク構造であることがわかり、その研究は物理学、生物学から社会科学まで多岐に亘る分野で盛んに行われている。そのような研究状況にあって、著者が行った研究はこのネットワーク上のスピン系、特にイジング模型の解析である。これまでは木構造が無限に広がりをもつ場合の統計力学理論しか扱われていなかったが、本論文は端点（リーフ）があからさまに存在する有限木上のスピン系の統計力学理論を構築することによって無限木との著しい相違点を見事に照らし出し、さらにネットワークのハブ構造の影響を浮き彫りにする重要な論文である。

著者はまず、冪分布に従うランダム分岐木上の強磁性イジング模型の磁化および零磁場帯磁率の定式化とその厳密な表式を導出することに成功した。その結果によればこの系は有限温度では自発磁化を持ち得ないということが明らかになった。また、冪分布の指数が小さいほどハブ構造が出やすいが、その指数が3以下ではどの温度でも局所帯磁率が発散しており、指数が3を超えると常磁性相が現れるがその温度領域は木の根（ルート）とリーフで異なっていることが示された。さらに、その厳密解の表式は強磁性ポッツモデルにも拡張され、イジング模型と同様の振る舞いをすることを明らかにした。これらの結果は、ネットワークがリーフの存在の有無によってその熱力学的極限の振る舞いがまったく異なる特性を持つことを、もっとも見通しのよい形で提示している点でも重要であるといえる。

次に、成長型ランダムネットワークについても帯磁率の解析を行った。木構造上の相関関数とその距離だけで計算可能であることを利用して、ランダム接合性成長型ネットワーク上の帯磁率を厳密に評価することに成功し、熱力学的極限でその発散温度が有限であることを示した。これは冪分布の指数が無限大の場合に相当する結果として理解される。また、冪分布が3に相当する優位接合性成長型ネットワークについて数値解析を行い、その帯磁率がどの温度でも発散していることを発見した。さらに、帯磁率の大きさはシステムサイズの非自明なべき依存性をもち、その指数が温度に依存しているという特異な性質をもつことを見出した。これは木構造のある種の自己相似性の存在を示唆する結果として興味深い。

このように、本論文はリーフの有無や木のハブ構造の度合いによって熱力学的極限の振る舞いが大きく異なることを、ふたつの異なるスケールフリーネットワーク上での帯磁率の発散的性質から示したという点で重要であり、ランダム系の統計力学理論に新たな知見

をもたらすこと大であるといふことができる。
よつて著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。