

学位論文題名

Elliptic Dedekind-Rademacher Sums,  
Their Reciprocity Formula, and  
Transformation Formula for Certain Infinite Series

(楕円 Dedekind-Rademacher 和とそれらの相互法則と  
ある無限級数の変換公式)

学位論文内容の要旨

近年整数論において、Dedekind 和の様々な楕円類似が研究されているが、より良い楕円類似を与えることが問題となっている。本研究は、その問題の一つの答えを与えている。良い楕円類似の意味を説明するため、Dedekind 和の著しい三つの特徴を述べる。一つ目は、一位の Bernoulli 関数を用いて定義できることである。Bernoulli 関数は Hurwitz zeta 関数の負の整数点における値に現れるなど整数論において重要な関数である。二つ目は、相互法則と呼ばれる美しい等式を持つことである。その法則は平方剰余の相互法則と密接な関係がある。三つ目は、Dedekind の  $\eta$  関数のモジュラー群  $SL_2(\mathbb{Z})$  上の変換公式の中に現れることである。Dedekind はこれを用いて Dedekind 和の相互法則を示した。Dedekind の仕事の後、Dedekind 和は様々な一般化された。そのうちの一つに Dedekind-Rademacher 和がある。Dedekind 和と同様に、それらは  $m$  位の Bernoulli 関数を用いて定義され、相互法則を持ち、そして、Arakawa によって研究された cotangent Dirichlet 級数の変換公式の中に現れる。

本研究でなされた仕事は、上の三つと同質の性質を持つ Dedekind-Rademacher 和の楕円類似(楕円 Dedekind-Rademacher 和)を与えたことである。より詳しく、本研究でなされた仕事を説明する。一つ目は、楕円 Dedekind-Rademacher 和を Kronecker 二重級数を用いて定義したことである。この級数が Bernoulli 関数の楕円類似であることは古くから知られていた。本研究の中でも楕円類似と考えるに足る妥当性が、Levin により定義された楕円 polylogarithm との関連において、更に強調されている。二つ目は楕円 Dedekind 和の相互法則を与えたことである。その証明は留数定理を用いてなされ、簡明である。三つ目は、楕円 Dedekind-Rademacher 和が現れる、ある無限級数とそのモジュラー群  $SL_2(\mathbb{Z})$  上の変換公式を構成したことである。その無限級数は cotangent Dirichlet 級数の楕円類似と看做せられる。modular パラメーターを無限大にとることにより、楕円 Dedekind-Rademacher 和のこれら三つの性質から、Dedekind-Rademacher 和のそれが再提供される。よって、本研究で研究されている楕円 Dedekind-Rademacher 和は Dedekind-Rademacher 和の楕円類似と看做すに足る性質を十分に有している。

# 学位論文審査の要旨

主 査 教 授 山 下 博  
副 査 助 教 瀧 川 陽 一  
副 査 教 授 寺 尾 宏 明  
副 査 准教授 前 田 芳 孝

学 位 論 文 題 名

## Elliptic Dedekind-Rademacher Sums, Their Reciprocity Formula, and Transformation Formula for Certain Infinite Series

(楕円 Dedekind-Rademacher 和とそれらの相互法則と  
ある無限級数の変換公式)

現代数学に多大な影響を与えたデデキント (Dedekind) により導入されたデデキント和は、数論的関数の研究にも現れる重要な数学的対象である。このデデキント和は、次のような著しい特徴を持っている。

- ① 一位のベルヌーイ関数を用いて定義される。
- ② 相互法則と呼ばれる関数等式を満たす。
- ③ デデキントのエータ ( $\eta$ ) 関数の変換公式に現れる。

その後、デデキント和の一般化が多く研究者により考案されてきた。その中で最も成功したものの1つがデデキント・ラーデマッハー (Dedekind-Rademacher) 和である。これは、デデキント和と良く似た次の性質を持つ。

- ① 高位のベルヌーイ関数を用いて定義される。
- ② 相互法則を持つ。
- ③ コタンジェント・ディリクレ級数の変換公式に現れる。

近年になり、楕円関数を用いてデデキント和の一般化 (デデキント和の楕円類似と呼ばれる) を構成しようとする研究が現れ始めた。この楕円類似は、デデキント和、およびその一般化であるデデキント・ラーデマッハー和の持っている上の性質①、②、③を引き続き満たすことが望まれる。

しかし、これまでの研究により構成されたデデキント和の楕円類似には「デデキント和の楕円類似の定義にベルヌーイ関数の楕円類似が現れない」、「多くの場合、デデキント和の楕円類似が現れるような変換公式が導かれていない」という不十分な点があった。

これらの点を克服するべく、著者は本論文においてデデキント和の新たな楕円類似を導入した。これが楕円デデキント・ラーデマッハー和である。さらに著者は、新たに導入されたこの楕円類似が次のような特筆すべき性質を持つことを示した。

- ① 楕円デデキント・ラーデマッハー和は、ベルヌーイ関数の楕円類似として由緒正しいクロネッカーの二重級数 (Kronecker's double series) を用いて定義される。

② 通常のデデキント・ラーデマッハー和の持つ相互法則と同様の形式をした相互法則を楕円デデキント・ラーデマッハー和も満たす。

③ 楕円デデキント・ラーデマッハー和がモジュラー群の作用に関する変換公式に現れるような無限級数が存在する。

上記③の無限級数もクロネッカーの二重級数の生成関数を用いて具体的に構成されている。また、楕円デデキント・ラーデマッハー和自身の変換公式も考察されている。

変換公式をはじめ、楕円関数を用いて定義されるいろいろな関数の関数等式を証明することが、本論文の中心課題の1つである。本論文の主要定理を証明する際、著者が用いた手法は、楕円関数論や留数定理を用いたものである。まず、すべての極が一位となっている有理型関数を定義する。次にこの有理型関数が楕円関数であることを示す。すると1つの周期平行四辺形内の極における留数の和は0となる。この(留数の和) = 0 という等式が求めたい関数等式となっていることを示すのである。したがって、本論文の証明は整数論の専門家以外でも理解しやすいものとなっている。

著者が新たに定義した楕円デデキント・ラーデマッハー和は、デデキント和の一般化が持つべき性質を数多く有しており、これまでに構成された他の楕円類似とは一線を画す意義深いものである。この点、整数論に貢献するところ大なるものがある。本論文では、楕円デデキント・ラーデマッハー和の関数としての性質を中心に明らかにしているが、今後、既存の楕円類似との関係、本論文で得られた関数等式の構造を明らかにすることなど、著者による研究の更なる発展が期待される。

よって著者は北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認める。