

学 位 論 文 題 名

Minimal submanifolds immersed in a complex projective space

(複素射影空間にはめ込まれた極小部分多様体に関する研究)

学位論文内容の要旨

複素空間形の部分多様体の断面曲率, リッチ曲率, スカラー曲率等に対する挾撃問題の研究は, 1967 年の Smyth によるアインシュタイン複素超曲面の分類を出発点として大きく発展し, 1970 年代の全実部分多様体 (反不変部分多様体), generic 部分多様体, CR 部分多様体の研究へとつながってきた. しかし, 複素空間形の特殊な構造を仮定しない余次元一般の部分多様体に関する結果は少ない. このような部分多様体に対する挾撃定理の証明が困難な理由の一つに, 第 2 基本形式に対するコダッチの方程式が複雑な形であり, 実空間形や複素空間形の部分多様体の挾撃問題を解く際の有用な手段である Simons 型の積分公式を有効な形に表現することが難しいということが挙げられる.

この問題点を解決するため, 正の正則断面曲率を持つ複素空間形の平均曲率ベクトル場が平行な部分多様体に対して, 第 2 基本形式の長さの 2 乗に対するラプラシアンを計算し, ある種の行列を導入することにより, Simons 型の積分公式の一つの有効な表現を得た.

この積分公式を用いて, 複素空間形のコンパクト部分多様体の, 第二基本形式の長さの二乗に関する以下の定理を得た.

定理. M を正の正則断面曲率 c を持つ複素空間形 $M^m(c)$ の, 実 n 次元コンパクト極小部分多様体とする. 第二基本形式 A が

$$|A|^2 \leq \frac{c}{4} \left(\frac{n+1}{2-1/p} - 2p \right)$$

を満たすとき, M は全測地的な $M^{n/2}(c)$ であるか, $|A|^2 = (n-1)c/4$ を満たす実超曲面である. ここで, p は余次元とする.

$|A|^2 = (n-1)c/4$ を満たす $CP^m(c)$ の実超曲面は A 型と呼ばれていることから, この結果は, 複素射影空間の A 型の実超曲面の特徴付けにもなっている. また, この定理は複素射影空間 $CP^m(4)$ の極小部分多様体に対する Yano-Kon (1983) の結果の拡張である.

また, 球面の極小部分多様体, 複素空間形の複素部分多様体, 全実部分多様体, 極小実超曲面に対しては, Itoh, Shen, Urabano, Ohnita, Kon らによって, 断面曲率に関する挾撃定理が得られている. この論文では, 複素射影空間の極小 CR 部分多様体の断面曲率に関する以下の結

果を得た。複素射影空間の CR 部分多様体は、複素部分多様体、全実部分多様体、generic 部分多様体、実超曲面等を含む部分多様体のクラスである。

定理. M を複素射影空間 $CP^m(4)$ の法接続が平坦な実 n 次元コンパクト CR 極小部分多様体とする。 M の断面曲率が $1/n$ 以上ならば、 M は測地超球面である。

さらに、複素射影空間の法接続が準平坦なコンパクト極小部分多様体についても、対応する結果を得た。また、複素空間形の極小部分多様体のリッチ曲率について、以下の定理を示した。

定理. M を複素射影空間 $CP^m(4)$ の実 n 次元コンパクト CR 極小部分多様体とする。 M のリッチ曲率が $n-1$ 以上ならば、 M は複素部分多様体であるか、以下のいずれかである：

- (a) 全測地的な実射影空間 RP^n ,
- (b) $CP^m(4)$ 内のある $CP^{(n+1)/2}(4)$ の擬アインシュタイン実超曲面,
- (c) 主曲率 $\cot \theta$ ($0 < \theta \leq \pi/12$) を持つある複素部分多様体 N 上の半径 $\pi/4$ の tube 上にあり、 $CP^{(n+1)/2}(4)$ の実超曲面。

この定理の応用として、リッチ曲率 S が $S(X, X) \geq (n-1)g(X, X) + g(PX, PX)$ を満たすような複素射影空間 $CP^m(4)$ の実 n 次元コンパクト CR 極小部分多様体の分類定理を示した。ここで、 P は複素射影空間 $CP^m(4)$ の複素構造の接方向への射影である。これらの結果は、複素射影空間の極小 CR 部分多様体のリッチ曲率に対する既知の挟撃定理の拡張となっている。

一方、実超曲面上の正則分布に着目して、複素空間形の实超曲面の性質を調べる研究の一環として、 η -全臍的という条件の拡張を行った。複素射影空間の実超曲面で全臍的なものは存在しないことから、代わりに η -全臍的という条件が調べられてきた。しかし、この条件は、構造ベクトル場が主曲率ベクトル場になるという仮定を必要としており、この仮定を外すことによってより広い範囲の実超曲面を取り扱うことが出来ると考えた。そこで、複素射影空間の実超曲面に対し、正則分布上で第二基本形式が恒等写像の関数倍であるという条件を調べ、以下の定理を得た。

定理. M を正則断面曲率 c を持つ複素空間形 $M^m(c)$ ($c \neq 0, m \geq 3$) の実超曲面とする。第二基本形式 A が正則分布上で恒等写像の関数倍であるとき、 M は局所的に η -全臍的であるか、線織超曲面である。

さらに、複素空間形の実超曲面のリッチ曲率が正則分布上で満たすべき式を求め、複素空間形の擬アインシュタイン超曲面の特徴づけを行った。

本論文では、以上のような複素射影空間内の極小 CR 部分多様体、実超曲面の性質を明らかにした。

学位論文審査の要旨

主 査 准教授 古 畑 仁

副 査 教 授 山 口 佳 三

副 査 教 授 石 川 剛 郎

学 位 論 文 題 名

Minimal submanifolds immersed in a complex projective space

(複素射影空間にはめ込まれた極小部分多様体に関する研究)

空間形の部分多様体が与えられたとき、その誘導計量に対して各種の曲率が定義できる。逆に、その各種の曲率が、与えられた条件（不等式）をみたすような部分多様体を決定する問題は、部分多様体論の重要なテーマである（部分多様体論における曲率の挟撃問題）。

複素空間形、とくに複素射影空間の複素部分多様体については、早くから多くの研究がなされた。この場合は、実空間形内の部分多様体論の成果の応用が比較的自然に行われる。著者は、複素部分多様体を含むより広いクラスであるところの極小CR部分多様体について、上記の問題に取り組んだ。手法は積分公式を用いる古典的なものだが、この設定でそれを直接実行するのは複雑で敬遠されがちであり、近年はあまり大きな進展が見られない状況であった。著者はそれに挑戦し、巧妙な計算で有効な Simons 型積分公式を得て、それを活用して新しいいくつかの挟撃定理を証明した。

CP^m を m 次元複素射影空間（正則断面曲率 4）とし、 M をその n 次元コンパクト極小CR部分多様体と仮定する。(1) M の法接続が平坦のとき、断面曲率が $1/n$ 以上である場合の M を決定した。これは、81年の矢野健太郎らの定理の拡張になっている。(2) リッチ曲率が $n-1$ 以上である場合の M をある意味で決定した。これは、89年の昆正博の定理を進展させたものである。著者があらたに得た余次元還元定理が重要な役割を果たした。(3) スカラー曲率が $n(n+2) - (n+1)/(2-1/(2m-n))$ 以上である場合の M を決定した。これは、アンビエント空間が正則断面曲率正の複素空間形の場合への拡張も与えられ、83年の矢野健太郎らの定理の一般化になっている。

そのほかに、著者は関連するつぎの成果を得ている。 M を正則断面曲率非零の複素空間形内の実超曲面とする。アンビエント空間の複素構造 J と M の単位法ベクトル場 N に対して JN は M の接ベクトル場になり、それに直交する M 上の接分布を D とかく。5次元以上の場合に、 M が擬アインシュタイン的であるということ、あるいは、線織的または η 全臍的であるということ、それぞれ D 上で記述される条件で表現しなおした。

このように、著者は複素空間形の部分多様体論について新知見を得たものであり、微分幾何学（数学）の発展に貢献するところ大なるものがある。よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。