

Ikeda's conjecture on the Petersson inner product of the Ikeda lifting

(池田リフトのピーターソン内積に関する池田の予想)

学位論文内容の要旨

Symplectic 群 $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Siegel 尖点形式 F に対して, その商空間 $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_n$ ($\mathfrak{H}_n$ は n 次の Siegel 上半空間とする) 上の積分値として定義される Petersson 内積 $\langle F, F \rangle$ は, F の standard L -関数 $L(s, F, \mathrm{St})$ の特殊値の超越的部分を記述する非常に重要な不変量であることが知られている. 一方, 本稿中の文献 [17] において, 池田 保氏は, Duke-Imamoğlu の予想を証明する形で, $k > n + 1$ を満たす正の偶整数 n, k について, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k - n$ の尖点形式 f に対して, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Siegel 尖点形式 F_f でその standard L -関数が

$$L(s, F_f, \mathrm{St}) = \zeta(s) \prod_{i=1}^n L(s + k + i, f)$$

となるものを構成した. このリフト F_f は, 現在では, 池田リフトと呼ばれている. 更に, 池田氏は, 文献 [18] において, F_f の Petersson 内積 $\langle F_f, F_f \rangle$ の値を f の保型 L -関数の特殊値を用いて記述する予想を提出した. 尚, $n = 2$ の場合には, F_f が f の齋藤-黒川リフトと一致することから, この予想は, Kohnen-Skoruppa によって既に知られている.

本論文は, 上述の予想を証明するべく, 桂田 英典氏と共同で進めてきた研究の中で, 主に, 著者によって得られた結果について報告するものである: まず, 著者は, F_f の Petersson 内積 $\langle F_f, F_f \rangle$ が, f に付随する L -関数の特殊値と, F_f の Fourier-Jacobi 展開の係数として得られる, Jacobi 群 $\mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{Z})^J = \mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^{2n-2} \times \mathbb{Z})$ に関する重さ k 指数 1 の Jacobi 尖点形式 ϕ_f の Petersson 内積 $\langle \phi_f, \phi_f \rangle$ を用いて記述され得ることを示した. 更に, 著者は, 伊吹山 知義氏によって与えられた線型対応により ϕ_f に対応する, $\mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_0^{(n-1)}(4)$ に関する重さ $k - 1/2$ の Siegel 尖点形式 $\mathcal{F}_f$ を用いて, F_f の Petersson 内積 $\langle F_f, F_f \rangle$ が, $\mathcal{F}_f$ の Petersson 内積 $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{F}_f \rangle$ と, f に付随する L -関数の特殊値を用いて記述され得ることを明らかにした. このことにより, 上で述べた池田の予想が, より証明するのに適した形の或る予想へと帰着される. 実際, 本研究のその後の進展により, この予想が示され, その結果, 池田の予想に完全な証明が与えられた. このことについても, 本論文の最終節において, 詳細に言及している. 又, 著者は, 本論文において, 池田リフトの Fourier-Jacobi 展開によって得られる Jacobi 尖点形式 ϕ_f に対して, その standard L -関数 $L(s, \phi_f, \mathrm{St})$ の明示公式をも与えている.

学位論文審査の要旨

主 査 准教授 前 田 芳 孝

副 査 教 授 中 村 郁

副 査 教 授 山 下 博

副 査 教 授 桂 田 英 典 (室蘭工業大学・共通講座)

学 位 論 文 題 名

Ikeda's conjecture on the Petersson inner product of the Ikeda lifting

(池田リフトのピーターソン内積に関する池田の予想)

リーマンのゼータ関数の正の偶数点に於ける値の代数的因子はクンマーにより円分体の類数と深い関係があり、それは後に岩澤理論へと結実した。この円に関する整数論は楕円曲線に関する整数論へと進展しており、楕円尖点形式に付随するエル関数の特殊値の代数性が志村五郎により示されている。これらの研究に続くものとして、楕円尖点形式の多変数への拡張であるジーゲル尖点形式に付随するスタンダード・エル関数の特殊値の研究は整数論に於いて重要なテーマである。この場合にも特殊値の超越因子の本質的因子は問題のジーゲル尖点形式のピーターソン内積で与えられることがベッヒェラーによって示されており、その明示的な公式を求めることは重要な問題である。これに関し、池田は楕円尖点形式から池田リフトと呼ばれるジーゲル尖点形式を構成し、そのピーターソン内積についての予想を与えた。2次のジーゲル尖点形式への池田リフトの場合は、齋藤-黒川リフトと一致し、この場合についての池田の予想は既にコーネン-スコルパにより既に知られている。河村氏は桂田との共同研究により、更に高次のジーゲル尖点形式が現れる一般の場合に（2次の場合も含めて）、池田リフトのピーターソン内積を元の楕円尖点形式に付随するエル関数の特殊値とヤコビ形式のピーターソン内積との積、及び、元の楕円尖点形式に付随するエル関数の特殊値と半整数ウェイトのジーゲル尖点形式のピーターソン内積との積による2通りの明示的公式を与えた。これらの表示はそれ自身興味深いものであるが、この表示により池田の予想が1変数の半整数ウェイトの尖点形式のピーターソン内積と高次の半整数ウェイトのジーゲル尖点形式のピーターソン内積との間の関係に関する自然な問題へと変換され、この観点から池田予想の解決への道を与えるという意味でも重要なものである。これに関し、河村氏はこの方針による池田予想の解決に重要な明示公式も与えている。

これを要するに、著者はジーゲル尖点形式の池田リフトについて重要な新知見を得たものであり、ジーゲル尖点形式の整数論並びに関連する分野へ貢献するところ大なるものがある。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。