博 士（理 学） 出 末 光 夫

学 位 論 文 題 名

Wavelet characterizations and wavelet bases of function spaces

（関数空間のウェーブレットによる特徴付けとウェーブレット基底）

学位論文内容の要旨

関数空間の性質を調べる為の１つの有効な手段として、適当な関数系を用いて関数空間に属する各関数を展開し、展開係数によってその関数を特徴付ける方法がある。本論文では、このような関数系を構成するウェーブレットに焦点を当てる。そして、幾つかの関数空間について考察し、それらの関数空間のウェーブレットによる特徴付けと優れた基底の構成を目的とする。

ウェーブレットとは、$L^2(\mathbb{R}, dx)$ に属する関数 ψ で、関数系 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ によって $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の正規直交基底を与えるものである。ここで、各関数 $\psi_{j,k}$ は $\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ で定義される。また、関数系 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ はウェーブレット基底と呼ばれる。

古典的なウェーブレットの例として、Haar wavelet $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ が知られている。この関数は１９１０年 Haar によって研究されたが、その後、Mallat による MRA(多重解像度解析) の概念が確立され、その枠組みの中で幾つかの注目すべきウェーブレットが生まれた。例えば、Schwartz class に属する Meyer wavelet、コンパクトな台を持つ滑らかなウェーブレットである Daubechies wavelet などが有名である。

$L^2(\mathbb{R}, dx)$ に属する関数 f に対して、f はウェーブレット基底によってウェーブレット展開され、Parseval の等式より f の L^2-ノルムがウェーブレット係数で表現される事が分かる。もし、適当な滑らかさや減少度、または台のコンパクト性などの優れた性質を持つウェーブレットを用いれば、様々な関数空間の特徴付けと基底がウェーブレットによって与えられる事が知られている。特にウェーブレットによる重み付き関数空間の特徴付けと基底の構成の研究は、Muckenhoupt の A_p weight の理論に基づいて発展してきた。

A_p weight に関する重み付き L^p 空間 $L^p(w)$ $(1 < p < \infty)$ の場合、１９９４年 Lemarié-Rieusset、２００１年 García-Cuerva–Martell および２００３年 Aimar–Bernardis–Martín-Reyes 達によって、滑らかさと減少度に関して 1-regular の条件を満たすウェーブレットが $L^p(w)$ の特徴付けを与え、更にウェーブレット基底が $L^p(w)$ の無条件基底となる事が証明されている。

こうした重み付き L^p 空間 $L^p(w)$ のウェーブレットによる特徴付けと無条件基底の構成の観点から、近年幾つかの拡張された A_p クラスの研究がされてきた。Aimar–Bernardis–Martín-Reyes によるもう１つの興味深い結果として、彼らは二進化による拡張に相当する A_p^{dy} weight に関する重み付き L^p 空間 $L^p(w)$ の特徴付けと無条件基底を Haar wavelet を用いて与えた。一方、異なる形の拡張として局所化による A_p クラスの拡張である A_p^{loc} クラスが Lemarié-Rieusset によって考察された。彼は A_p^{loc} weight に関する重み付き L^p 空間 $L^p(w)$ の特徴付けと無条件基底を得る為には、適当な滑らかさとコンパクトな台を持つウェーブレットだけではなく、ウェーブレット構成の素である MRA のスケーリング関数も必要である事を示した。

本論文の主目的の１つは、より一般化されたウェイトに関する重み付き L^p 空間および関連した重み付き関数空間の特徴付けと基底を得る事である。本論文では、まず二進化かつ局所化による一般化されたウェイトのクラス $A_p^{\mathrm{dy},m}$ を定義し、$A_p^{\mathrm{dy},m}$ weight に関する重み付き L^p 空間 $L^p(w)$ の特徴付けと無条件基底を Haar wavelet と Haar sacling 関数を用いて与える。次に重み付き Sobolev 空間 $L^{p,s}(w)$ $(1 < p < \infty,\ s \in \mathbb{N})$ について考察し、十分に滑らかなウェーブレットおよびスケーリング関数を用いる事によって、ウェイトが A_p weight および A_p^{loc} weight の各場合に関してそれぞれ特徴付けと無条件基底を与える。更なる重み付き

関数空間として、重み付き Herz 空間についても考える。重み付き Herz 空間に関しても C^1 級の滑らかさとコンパクトな台を持つウェーブレットを用いる事によって同様の結果が得られる事を示す。

本論文で扱うもう１つの関数空間は変動指数 L^p 空間 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ である。１９９１年の Kovácik–Rákosník による研究によって変動指数 L^p 空間の基本理論が構築された。その後この基本理論に基づき、変動指数 L^p 空間の研究は大いに発展してきた。例えば、Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer や Nekvinda によって、Hardy–Littlewood の最大値作用素 M の有界性に関する変動指数 $p(\cdot)$ の十分条件が示されている。更に、２００６年 Cruz-Uribe–Fiorenza–Martell–Pérez の補外定理によって、M の $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上における有界性の仮定の下での特異積分作用素や分数積分作用素などの有界性が証明されている。また、通常の L^p 空間とは異なり、変動指数 L^p 空間においてはノルム不等式とモジュラー不等式との差異がある事に注目しておきたい。２００５年 Lerner によって、M が $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ におけるモジュラー不等式を満たすならば、指数 $p(\cdot)$ は定数に一致してしまうという結論が示されている。通常の L^p 空間ではノルム不等式とモジュラー不等式は同じ概念であるが、この結論は変動指数 L^p 空間ではモジュラー不等式がノルム不等式よりも極めて強い評価を与える事を示している。

本論文のもう１つの目的は、変動指数 L^p 空間におけるウェーブレット理論の研究である。まず補外定理を応用する事により、$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ のウェーブレットによる特徴付けを与え、更にウェーブレット基底が $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ における無条件基底を構成する事を示す。また、MRA に付随する直交射影の性質に着目して、モジュラー不等式についても考察する。そして、ノルム評価に関して実現できるウェーブレットによる特徴付けが、モジュラー不等式については一般には不可能である事を示す。

最後に、greedy 基底の構成について述べる。この基底は、関数の展開の有限和による非線形近似を与えるものであり、これまでに重みのない関数空間でのウェーブレットを用いた構成が研究されてきた。また、１９９９年 Konyagin–Temlyakov は、greedy 基底である事の必要十分条件を無条件かつ democratic な基底である事によって与え、この基底の概念を特徴付けた。本論文では、ウェーブレットとスケーリング関数を用いて、重み付き L^p 空間 $L^p(w)$ と重み付き Sobolev 空間 $L^{p,s}(w)$ における greedy 基底を構成する。関数空間の特徴付けと無条件基底の構成に関する結果を応用し、我々の無条件基底を正規化したものが democratic であると確かめる事が鍵となる。

学位論文審査の要旨

主　査　准教授　立　澤　一　哉
副　査　教　授　林　　　実樹廣
副　査　教　授　中　路　貴　彦

学 位 論 文 題 名

Wavelet characterizations and wavelet bases of function spaces

(関数空間のウェーブレットによる特徴付けとウェーブレット基底)

1985年にMeyerがウェーブレットを発見して以来，ウェーブレット理論は実解析や関数解析の研究において非常に有用であることが示されてきた．特に急減少関数からなるMeyerのウェーブレット基底は，多くの関数空間において無条件基底となっており，その関数空間に属する関数を特徴付けることができることが示された．特に実解析においてよく用いられるA_pクラスの重み関数を持つL^p空間のウェーブレットによる特徴付けについては，1994年のLemarié-Rieussetによる研究や2001年のGarcía-Cuerva-Martellの研究などがあり，この重みの付いた空間において，ウェーブレット基底が無条件基底となり，さらに関数空間が特徴付けられることが示された．

著者は本学位論文において，重みの付いた様々な関数空間におけるウェーブレット基底の性質の研究を行った．本論文の結果は4つの部分に分けることができる．

まず著者は2進局所A_pクラスの関数を定義し，それを重みとして持つL^p空間において，Haar関数系と対応するスケーリング関数から得られる関数系が無条件基底さらにはグリーディー基底になっていることを証明した．また逆に一般のBorel測度を持つL^p空間で，Haar関数系と対応するスケーリング関数が無条件基底になるためには，重み関数が2進局所A_pクラスの関数になることを示した．これらの結果は，正則なウェーブレットに関して，Lemarié-RieussetやAimar-Bernardis-Martín-Reyesにより得られていた結果を拡張したものである．またHaar関数系がグリーディー基底になるという結果は，従来は行なわれていなかった新しい結果である．

さらに著者は，局所A_pクラスの関数を重みとして持つSobolev空間の，スケーリング関数とウェーブレット関数系による特徴付けを示し，それらが無条件基底さらにはグリーディー基底になることを証明した．局所A_pクラスの関数を重みとして持つSobolev空間のウェーブレットによる特徴付けは他に例が無く，これは新しい結果である．またグリーディー基底であることを示した結果も新しいものである．

また著者は重み付きHerz空間のウェーブレットによる特徴付けを与えた．ここで考えられている重み関数はA_pクラスの関数である．この結果における重み関数の条件は，Tang-Yangの2000年の結果と似ているものだが，Tang-Yangの結果には誤りがある．そこで彼等の論文の誤りを修正した上で，さらに重み付きHerz空間においてウェーブレット関数系が無条件基底になっていることを示したものである．

また最後に著者は，変動指数L^p空間において，ウェーブレット関数系が無条件基底となること

を示した．またさらにウェーブレット関数系から作った square 関数について，変動指数 L^p 空間においてモデュラー不等式が成り立つならば，指数は定数であることを示した．これは Lerner が Hardy-Littlewood の最大作用素について示していることが，square 関数についても同様に成立することを示したものである．

これらを要するに，著者は関数空間のウェーブレットによる特徴付けについての新知見を得たものであり，ウェーブレットとその応用の研究に貢献するところ大なるものがある．よって著者は北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格があるものと認める．