

Mathematical Studies on Quantum Field Theory

(場の量子論の数学的研究)

学位論文内容の要旨

本研究は、場の量子論における諸問題を数学的に厳密な方法で解決するものである。この論文は、二部からなり、第一部は「場の量子論のモデルに対するスケーリング極限」、第二部は「不定計量空間上の場の量子論に関するいくつかの側面」である。

第一部は、Davies (1979) によって導入された量子的粒子と量子場の相互作用系のハミルトニアンに対する弱結合極限の理論に関する研究である。特に、Arai (1990) が開発した強レゾルヴェント収束の擬レゾルヴェント極限を用いるスケーリング極限と呼ばれる方法を、いくつかの一般的な相互作用系のモデルに応用し、量子場の有効相互作用を導出した。

第一章では、Arai, Hirokawa (1997)らによって導入された一般化されたスピنبゾン (GSB) モデルに対するスケーリング極限が論じられる。GSB モデルのハミルトニアンは、スピنبゾンモデルのハミルトニアンを一般化し、任意の量子系と量子場との相互作用系を記述する抽象的なものである。スピنبゾンモデルに対しては、既に Arai (1990) によって、非相対論的極限に対応するスケーリング極限が論じられているが、本研究では、より一般的な GSB モデルに対するスケーリング極限を論じ、そのいくつかの応用について述べた。

第二章ではネルソンモデルのある種の一般化を施したモデルに対するスケーリング極限を論じた。このような一般化によって、非相対論的粒子と内部自由度を持つ量子場が相互作用するモデルのハミルトニアンの広いクラスに対する弱結合極限が、取り扱えるようになった。その主な例として、原子核中の核子とアイソスピンの内部自由度をもつ π 中間子の場との相互作用系のハミルトニアンの弱結合極限によって、核子間の有効ポテンシャルを導出した。

第二部は、不定計量空間上の場の量子論に関する構成論的な研究である。物理学において、不定計量空間上の場の量子論は、さまざまな文脈で登場するが、その取り扱いは、有限次元ベクトル空間や(無限次元)ヒルベルト空間の理論の類推が主であった。そのため、数学的に厳密な理論の構築が期待され、一時多くの数学者によって、(無限次元)不定計量空間の理論が研究されたが、その取り扱いの難しさのために、未だ物理的要求を満たすに至っていないように思われる。本研究では、Krein 空間上で定義される場の量子論についてのいくつかの側面を述べる。

第三章では、量子電磁力学における Gupta-Bleuler 形式について、量子電磁場と古典

場との相互作用系を例にとり、数学的な考察をした。まず、状態の空間として、Fock 空間上に、計量作用素 η を用いて、不定計量の Krein 空間を定義し、その上に正準交換関係 (CCR) の表現をひとつ定め、それを用いて、作用素値超関数としての量子輻射場を定義した。これらが物理的に要求される場の方程式と Heisenberg の運動方程式の解となることを証明した。通常の Hilbert 空間では、系のハミルトニアンが自己共役である限り、Heisenberg 方程式を満たす作用素値超関数は一意的に存在し、多くの場合、それが直ちに場の方程式の解となる。不定計量空間では、ハミルトニアンは通常の意味での自己共役性を失い、 η -自己共役であるに過ぎず、解の存在も一意性も全く自明ではない。この場合には、CCR の表現をひとつ固定すれば、解は一意的であることが証明される。Gupta-Bleuler 形式によれば、Gupta の補助条件を用いて、不定計量空間から物理的な状態が選びだされ、その状態全体のなす物理的空間は半正定値の部分空間となるはずである。ひとたび物理的空間が同定されると、ノルムがゼロのベクトルの空間で割ることにより、Hilbert 空間が構成できて、確率解釈が可能となる。ところが、物理的空間は、あるベクトル方程式の解空間として特徴付けられ、そのベクトル方程式が非自明な解を持たなければ、物理的空間も自明となり得る。実際、赤外正則条件と呼ばれるある種の可積分性の条件の下では、物理的空間が非自明であり、赤外正則条件がなければ、物理的空間が自明になる事を証明した。これは、赤外異常と呼ばれる現象の一種であると考えられるが、本論文では、赤外異常と物理的空間の自明性との関連を見出した。

一方、Gupta の補助条件は、量子輻射場を用いて定式化されるため、CCR の表現のとり方に依存している。実際、上の Fock 空間上の表現とは非同値な表現を用いることにより、赤外正則条件が満たされなくても、物理的空間が自明にならないようにできることを証明した。

また、物理学で期待されるような、物理的空間が満たすべきいくつかの性質（たとえば半正定値性）があることを証明し、Hilbert 空間で構成される量子電磁場の理論 (Coulomb ゲージの理論) との関連についても論じた。

最後に、Krein 空間とその上の量子論に対する一般論を展開し付録とした。まず付録 A では、Krein 空間の定義と一般的性質を概観し、 η -自己共役性の簡単な判定条件を述べた。付録 B では、Krein 空間上の Schrödinger 方程式の解について、半正定値な部分空間上ではある種の一意性があることを示した。これにより、三章で物理的空間が存在すれば、Schrödinger 方程式の解はその上で一意であるといえる。付録 C では、抽象的な Krein 空間上に不定計量の Fock 空間（これも Krein 空間になる）が定義できることを示し、van Hove モデルといわれる型の抽象的な場の理論のモデルを定義した。そのハミルトニアン η -自己共役性と Schrödinger 方程式の解の存在を一般的に証明した。また、抽象的な意味での赤外正則条件の下で、ハミルトニアンが固有値を持つことを証明した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 新 井 朝 雄

副 査 教 授 岸 本 晶 孝

副 査 准教授 山ノ内 毅 彦

学 位 論 文 題 名

Mathematical Studies on Quantum Field Theory

(場の量子論の数学的研究)

近年、量子的粒子と量子場が相互作用する系に関する数学的研究が盛んに行われてきている。本論文は、こうした研究動向の中に位置付けられるものであり、量子場の3つのモデルに対する数学的に厳密な解析に関わるものである。本論文は二部からなり、第一部では、量子場の2つのモデル—一般化されたスピنبソンモデルと一般化されたネルソン型モデル—に対するスケーリング極限を論じ、第二部では、無限次元不定計量空間における量子場の理論(量子電磁力学)の基本的なモデルのひとつを数学的に厳密に構成し、その主要な性質を導出している。

一般化されたスピنبソンモデルは、抽象的な量子系とボース場が結合した系を記述するものであり、応用範囲は広い。著者は、相互作用を記述する作用素がある一般的なクラスに属する場合に、ハミルトニアン H のレゾルVENTの強収束の意味において、スケーリング極限の存在を示し、量子場の効果をとりいれた量子力学的ハミルトニアン H_{eff} =実効的ハミルトニアンを導いた。この結果の応用として、次の3つの系に関する実効ハミルトニアンを得た：(1) アイソスピンをもつパイ中間子と核子が相互作用する系；(2) 格子スピ n とボース場の相互作用系；(3) フェルミ場とボース場が相互作用する系。

一般化されたネルソン型モデルは、非相対論的な量子的粒子とボース場が相互作用する系のモデルの一般化であり、その特殊例は、原子核物理における基本的なモデルのひとつを与える。著者は、このモデルについても、スケーリング極限を考察し、一般化されたスピنبソンモデルと同様な結果を得た。応用として、核子間の相互作用に関する実効ポテンシャルを導出した。

スケーリング極限に関する以上の結果は、いずれも以前に得られていた結果を非自明な仕方 ϕ で拡張する新しい結果であり、独創的で意義深い。

不定計量空間上の量子場の具体的なモデルの数学的に厳密な研究は、その重要性にも関わらず、ただちに直面する、ある種の数学的困難さのために、ほとんど手付かずの状況にあった。著者は、この困難に取り組む、本論文では、理論の発展の基礎となる数学的な枠組みを論述した。特に、具体的なモデルの数学的に厳密な解析を行い、より一般的なモデルを数学的に構築する際の基礎をつくった。この意味でも本論文は独創的であり、その意義は大きい。

これを要するに、著者は、量子場のいくつかのモデルに関するスケーリング極限の新知見あるいは無限次元不定計量空間における量子場の理論に対する新知見を得たものであり、場の量子論の数学的研究ならびに数学における作用素論に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認める。