学位論文題名

Chu correspondences

(Chu 対応)

学位論文内容の要旨

集合間に 2 項関係 $\vdash \subset A \times X$ があると、その関係が定めるガロア対応 $A \supset B \mapsto B' := \{x \in X \mid a \vdash x, \forall a \in B\}$ ($Y \subset X$ についても同様に定まる) によって決まる閉集合族の完備束 $\mathcal{A} = \{B \mid B = B'', \forall B \subset A\}$, $\mathcal{X} = \{Y \mid Y = Y'', \forall Y \subset X\}$ があり、それらは逆同形 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{X}^{op}$ であることが知られている。一方、2 集合とその 2 項関係の組 $\mathcal{P} = (A, X, \vdash)$ を Chu 空間という。Chu 空間 $\mathcal{P}$ にたいして完備束の組 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ が定まり、これを $Gal(\mathcal{P})$ とかく。

本論文では、Chu 空間のあいだに Chu 対応 (Chu correspondence) を導入し、対象を Chu 空間、射を Chu 対応としてもつ圏 $ChuCors$ を定義した。Chu 対応 $\varphi = (L_\varphi, R_\varphi)$ とは、2 つの Chu 空間 $\mathcal{P} = (A, X, \vdash_{\mathcal{P}})$ と $\mathcal{Q} = (B, Y, \vdash_{\mathcal{Q}})$ に対して、

$$\forall a \in A, \quad \forall y \in Y, \quad L_\varphi a \vdash_{\mathcal{Q}} y \Leftrightarrow a \vdash_{\mathcal{P}} R_\varphi y$$

をみたし、かつ $L_\varphi a \subset B$, $R_\varphi y \subset X$ がどちらもそれぞれ $\vdash_{\mathcal{P}}$, $\vdash_{\mathcal{Q}}$ から決まる閉集合となっているような対応 $L_\varphi : A \rightarrow pow(B)$, $R_\varphi : Y \rightarrow pow(X)$ のことである。ここで $pow(X)$ とは X の部分集合族のことである。

このようにして定義した圏 $ChuCors$ と上半束の圏 $Slat$ のあいだにガロア関手 Gal を定義する。このガロア関手は、Chu 空間にその 2 項関係が定める完備束を、Chu 対応に上半束準同形を、それぞれ対応させる。射の対応については $Gal(\varphi) := \varphi_* : Gal(\mathcal{P}) \rightarrow Gal(\mathcal{Q})$ で定める。ここで、 $\varphi_*(A, A') = ((\bigcup_{a \in A} L_\varphi a)'', (\bigcup_{a \in A} L_\varphi a)')$ である。次の定理が得られた。

定理 1 ガロア関手は $ChuCors$ と $Slat$ のあいだの圏同値を与える。

圏 $Slat$ は、テンソル、internal hom、双対化など、豊富な演算をもつ *-autonomous 圏である。圏 $ChuCors$ もまた *-autonomous 圏であることも本論文で明らかになった。さらに本論文では、ガロア関手がこれらの演算を保存することも示した。

定理 2 ガロア関手は *-autonomous 構造を保存する。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 津 田 一 郎
副 査 教 授 由 利 美 智 子
副 査 教 授 辻 下 徹

(立命館大学理工学研究科)

学 位 論 文 題 名

Chu correspondences

(Chu 対応)

近年、形式文脈を理論の基盤にする研究が多様な分野で展開されているが、その際、形式文脈の相互関係を記述する概念として Chu 写像が使用されている。Chu 写像を射とする圏は、線型論理の意味論を展開する土台の一つを与えるために、理論計算機科学の研究者を中心として 1990 年代に活発な研究活動が行われた。しかし、Chu 写像は、単独概念で表現される形式概念を特別視するものであり、形式文脈の相互関係を記述する概念としては十分な一般性を持っておらず、また、そのことが Chu 写像の具体的扱いを困難にしている。

本論文において導入された Chu 対応は、Chu 写像にある不自然な制約から免れており、理論的にも柔軟性のあると同時に、具体的な扱いも容易であり、形式文脈を基盤とする分野で潜在的有用性を持っていることが推測される。

以下、論文の主要な概念と結果を概説する。

形式文脈は対応 $C = (X, A, R \subset X \times A)$ の別名である。部分集合 $Y \subset X$ に対し、どの $y \in Y$ とも R 関係にある $a \in A$ の全体を $Y' \subset A$ とかき、 Y の極集合と呼ぶ。同様に部分集合 $B \subset A$ についても極集合 $B' \subset X$ が定義される。 $Y'' = Y$ を満す $Y \subset X$ を閉集合と呼ぶ。閉集合全体は共通部分の演算について閉じており完備束をなす。これを形式文脈 C のガロア束と呼び $\text{Galois}(C)$ と書く。

2つの形式文脈 $C_i = (A_i, X_i, R_i)(i = 1, 2)$ の間の Chu 対応は、写像

$$F : A_1 \rightarrow \mathcal{P}(A_2), \quad G : X_2 \rightarrow \mathcal{P}(X_1)$$

($\mathcal{P}(-)$ は冪集合をあらわす) の対 (F, G) であって、すべての $a_1 \in A_1, x_2 \in X_2$ について Fa_1, Gx_2 が閉集合であり

$$Fa_1 \times x_2 \subset R_2 \iff a_1 \times Gx_2 \subset R_1$$

が満されているものをいう。形式文脈を対象とし、Chu 対応を射でとする圏を $ChuCors$ とする。

この論文の主要な結果は次の二定理にまとめられている。

定理 73 形式文脈 C から完備束 $Gal(C)$ への対応は、圏 $ChuCors$ から上半束射の圏 $Slat$ への圏同値関手 Gal を定める。

定理 98 圏 $ChuCors$ は *-autonomous 圏の構造を持ち、圏同値関手 Gal が、*-autonomous 圏としての構造を保つ。

圏 $Slat$ はよく理解されていることから、定理 73 は、 $ChuCors$ の圏の構造を明らかにしたものであると評価できる。一方、形式文脈は完備束のコンパクトな記述法を与えていることに着目すれば、定理 73 は、完備束間の上限保存写像に対し Chu 対応によるコンパクトな記述法を与えたという評価も与えることができる。

定理 98 は、形式文脈の構成法として、圏論的に良い性質を持つものを豊富に与えたもので、形式文脈を基盤に持つ諸分野での有用性が期待できる。

以上のように、この論文において著者は、形式文脈の相互関係を記述するのに使用されてきた Chu 写像を拡張した基盤的概念である Chu 対応を導入し、その基本的性質を明らかにし、形式文脈を基盤とする多くの研究分野に対し大きな貢献をしたことになる。よって、著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格を持つ、と認める。