

学位論文題名

Mathematical approach to several problems related to viscous incompressible flows

(非圧縮性粘性流体とその周辺の解析的研究)

学位論文内容の要旨

水などの非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式は、流体力学における基礎方程式としてこれまで非常に多くの研究がなされている。Navier-Stokes 方程式は流体の速度場と圧力場を未知関数とする非線形連立偏微分方程式系として与えられる。しかしながら、その非線形性や速度場ベクトルの各成分における相互作用の複雑さから、その解析には今なお困難があり、未解決な問題が多く残されている。一方、流体のダイナミクスにおいてその渦度場が重要な役割を果たすことが知られている。渦度場の方程式である渦度方程式は Navier-Stokes 方程式に curl 作用素を作用させることで得られ、Navier-Stokes 方程式と形式的に同値である。当論文ではこれら Navier-Stokes 方程式と渦度方程式を中心とした、非圧縮性粘性流体に関連する偏微分方程式について数学的研究を行った。当論文は次の 4 部から構成される。

- 第 1 章. Burgers 渦の存在・安定性の研究
- 第 2 章. 輸送項付き拡散方程式の基本解の研究
- 第 3 章. 一様局所 p 乗可積分空間における Navier-Stokes 方程式の初期値問題
- 第 4 章. 流体中の相転移に関する自由境界問題

Burgers 渦は歪み流の影響を受けた流体の渦度場のある定常状態を与える。これまで Burgers 渦の研究は数値計算によるものが先行しており、そこでは乱流中の渦度場の集中した領域に現れる渦管構造が Burgers 渦でよく近似されるという興味深い報告がなされている。しかし数学的には Burgers 渦の性質はまだよく解明されていない。こうした動機から、第 1 章では Burgers 渦の存在と安定性について研究した。歪み流が軸対称なときには、Burgers 渦は 2 次元 Gauss 核の定数倍によって具体的に表され、これは発見者の Burgers (1948) にちなんで軸対称 Burgers 渦と呼ばれる。また、この定数は渦 Reynolds 数と呼ばれる渦度場の強さを表す物理量を表す。歪み流が非軸対称の時には、そのような具体的表示はもはや期待できない。そのため、そもそも非軸対称 Burgers 渦が厳密に存在するのかが重要な問題となる。近年 Gallay and Wayne (2006) によって、歪み場の非軸対称性が十分小さいときには、任意の渦 Reynolds 数に対する非軸対称 Burgers 渦の存在が証明された。一方で、Robinson and Saffman (1984), Kida and Ohkitani (1992), Prochazka and Pullin (1998) などの数値計算では、渦 Reynolds 数が大きくなるにつれて非軸対称 Burgers 渦の形状がより軸対称に近づき、また強い漸近安定性をもつということが示唆されている。これまでこのような渦 Reynolds 数と Burgers 渦の関係は数学的にはよくわかっていなかった。当研究では、まず Burgers 渦の方程式に対する適当な線形化作用素を解析し、数値計算と極めてよく合致する数学的結果を得た。特に線形化作用素のスペクトルを調べ、渦 Reynolds 数と線形化方程式における安定性との関係を明らかにした。さらにこの線形化作用素の研究をもとに、歪み場の非軸対称性が小さくない場合でも、渦 Reynolds 数が十分大きい場合には非軸対称 Burgers 渦が存在することを証明し、Moffatt, Kida,

and Ohkitani (1994) における高い渦 Reynolds 数での Burgers 渦の形式的な漸近展開を数学的に正当化した。これは前述の Gallay and Wayne による存在定理を拡張するとともに、渦 Reynolds 数と Burgers 渦の対称性の関係を数学的に明らかにするものである。

2 次元渦度方程式はスカラー値の未知関数に対する方程式となり、これまで多くの研究がなされてきた。特に、Giga, Miyakawa, and Osada (1988) や Gallay and Wayne (2005) では、線形化方程式である輸送項付き熱方程式が重要な役割を果たしてきた。そこで第 2 章では輸送項付き拡散方程式の基本解について考察する。ある種のスケール変換に対して不変な関数空間における流体の方程式への応用を考えると、この輸送項には時刻 0 での特異性を許す必要がある。しかしながら、この特異性のもとでは輸送項が時刻 0 付近で方程式の主要部に対して小さいとみなすことができない。そのため、輸送項が特別な構造を持つ場合には Osada (1988) によって基本解の存在や一意性が得られていたものの、果たしてそのような特殊な構造が本当に必要なのか一般にはわかっていなかった。一方で、Carlen and Loss (1997) や Matsui and Tokuno (1997) により、基本解が存在したとすればそれは Gauss 型の上からの各点評価を持つことが輸送項に特別な構造を仮定することなく示された。当研究では、基本解に対する下からの Gauss 型各点評価を新たに導いた。これにより、基本解に対して上下からの Gauss 型各点評価が輸送項に特別な構造を仮定することなく得られたことになる。この各点評価をもとに Nash (1958) の議論から基本解のヘルダー連続性に関する先験的評価を導き、基本解の存在と一意性を明らかにした。

近年、Giga, Inui, and Matusi (1999) や Koch and Tataru (2001) などによる空間遠方で減衰しない関数を含む関数空間での Navier-Stokes 方程式の研究が活発になされている。第 3 章では、寺澤祐高氏との共同研究により、空間遠方で減衰しない L^∞ 関数や局所的に特異性を持ち得る L^p 関数を含む、一様局所 p 乗可積分空間において全空間での Navier-Stokes 方程式の初期値問題の可解性を考察した。ここでは、まずヘルムホルツ射影作用素により形式的に圧力項を消去し、熱半群を用いて対応する積分方程式に直した。積分方程式の非線形項にヘルムホルツ射影作用素が現れるが、考えている空間でこの作用素は有界ではないので、非線形項の意味づけそのものが問題となる。ここでは、熱半群、ヘルムホルツ射影作用素がともに合成作用素であることに着目し、非線形項に現れる微分と合わせて一つの合成作用素と捉えることにより非線形項の意味づけ、必要となる評価を得た。当研究により、一様局所 p 乗可積分空間における積分方程式の時間局所的な一意的可解性が証明された。さらに、解の初期値への収束を考察し、また、Navier-Stokes 方程式のもとで概周期性が保存されることを L^∞ 空間において証明した Giga, Mahalov, and Nikolaenko (2006) による結果を、一様局所 p 乗可積分空間の場合に拡張した。

最後に、第 4 章では非圧縮性粘性流体による輸送の影響下における相転移を表すモデルの解析を行った。これは、輸送項付き平均曲率流方程式と Stokes 方程式が連立した自由境界問題として定式化される。このようなモデルは近年 Blesgen (1999) や Liu and Shen (2003) など数値計算の立場からよく研究されているものの、数学的にはまだあまり取り組まれていない。特に、これまでの研究では形式的な議論が主だったため、解の一意性や自由境界の滑らかさなどについて厳密な考察がなされていなかった。当研究では、Stokes 方程式を積分方程式に直し、自由境界条件を layer potential として方程式に組み込むことで、一意的な時間局所的解を構成した。さらに、平均曲率流方程式による平滑化作用により、少なくとも解の存在する時間では自由境界が滑らかであることを示した。

学位論文審査の要旨

主 査 准教授 利根川 吉 廣

副 査 教 授 小 澤 徹

副 査 教 授 儀 我 美 一 (東京大学大学院

数理科学研究科)

副 査 教 授 神 保 秀 一

学 位 論 文 題 名

Mathematical approach to several problems related to viscous incompressible flows

(非圧縮性粘性流体とその周辺の解析的研究)

著者は非線形偏微分方程式によって記述される非圧縮性粘性流体に関する数理解析的な研究を行っている。それらは大別して(1)非圧縮性粘性流体による輸送の影響を考慮した自由境界問題、(2)Navier-Stokes 方程式の定常 Burgers 渦と Reynolds 数の研究、(3)輸送項付き熱方程式の基本解の研究、など、多岐にわたるものである。

(1)は、流体の運動を記述する方程式とその流体による輸送の影響を受けた相転移現象を表す方程式が連立した非線形偏微分方程式系として定式化される。この問題に対して、これまで Blesgen(1999), Liu-Shen (2003) など数値計算による研究は活発になされてきたものの、自由境界付近での強い非線形性による困難から数学的に厳密な研究はほとんどなされていなかった。特に方程式の適切性や自由境界の滑らかさといった非常に重要な問題がわかっていなかった。著者は自由境界に沿った速度場の滑らかさを導き、それをもとにして特殊な縮小写像を構成することで、方程式の時間局所的適切性を証明することに成功した。同時に自由境界が時間局所的には滑らかであることも示している。この分野の基礎研究として、著者のこれらの結果は重要な位置を占めるものである。

(2)は Navier-Stokes 方程式のある定常解を与える Burgers 渦についての研究である。Burgers 渦は乱流中に見られる渦管構造のモデルとして用いられ、物理的に重要な役割を担っていることが知られている。そこでは渦 Reynolds 数と呼ばれる渦度の強さを表す物理量が重要であるが、著者の業績はこの渦 Reynolds 数と Burgers 渦の関係についてのものである。これまで Robinson-Saffman (1984), Kida-Ohkitani (1992), Prochazka-Pullin (1998) などによる数値計算の結果から、渦 Reynolds 数が大きくなるほど Burgers 渦の構造がよりシンプルになり強い安定性を持つことが示唆されていた。しかし、なぜこのような相関関係があるのか数学的にはまったくわかっていなかった。著者は Burgers 渦の非線形偏微分方程式に対する線形化作用素を詳細に調べることで、渦 Reynolds 数と Burgers 渦に関する数値計算の結果に対する数学的な証明を与えた。考察されている線形化作用素には渦 Reynolds 数がパラメータとして現われており、線形化作用素のスペクトルのパラメータ依存性などが明らかにされている。この研究は独創的であるとともに偏微分作用素の研究として数学的に非常に興味深い。著者のこれらの結果が、今後、当該分野で基本的なものとして認識されることは間違いないであろう。

(3) では輸送項付き熱方程式の時間無限大における解の挙動に関して重要な結果を挙げている。(1-3) 以外にも局所一様 p 乗可積分空間における Navier-Stokes 方程式に関する研究もなされている。

これらの研究は重要なものであり、よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。