

学位論文題名

A generalized local limit theorem for mixing semi-flows

(混合的半流に対する一般化された局所中心極限定理に関する研究)

学位論文内容の要旨

近年、確率論における独立な確率変数の和の分布とその極限分布に関する理論において、力学系の測度論的カオティックな挙動、エルゴード性や混合性などを利用することによって、独立ではない確率変数の列に対しても成立することが示されている。本研究では極限定理の一つの特別な場合、中心極限定理、及び局所中心極限定理に着目した。

コンパクトな多様体 M 上のボレル確率測度 μ を保存する正の連続時間 t でパラメーター付けされた半流と呼ばれる力学系 $S_t: M \rightarrow M$ と実数値ボレル可測関数 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。このとき $\{g \circ S_t; t \geq 0\}$ は確率空間 (M, μ) 上の定常確率過程を定める。力学系 $(S_t)_{t \geq 0}$ の μ に関する混合性を用いて、この定常確率過程 $\{g \circ S_t; t \geq 0\}$ に対して中心極限定理、及び、(一般化された) 局所中心極限定理を示すのが目的である。ここで定常確率過程 $\{g \circ S_t; t \geq 0\}$ が局所中心極限定理を満たすというのは、0 ではない極限 $\sigma := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_M (\int_0^t g \circ S_\tau d\tau)^2 d\mu$ が存在するとき、任意の実数上の急速減少関数 u に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{t\sigma} \int_M u \left(z + \int_0^t g \circ S_\tau d\tau \right) d\mu - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-z^2/2t\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta) d\theta \right| = 0$$

が成り立つことである。ただし、簡単のため $\int_M g d\mu = 0$ とする。上の極限定理は密度に関する収束定理であり、 $t \rightarrow \infty$ のとき、任意の有限区間 I に対して

$$\left| \sqrt{t\sigma} \mu \left(\int_0^t g \circ S_\tau d\tau \in I + z \right) - m(I) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-z^2/2t\sigma} \right| \rightarrow 0$$

が $z \in \mathbb{R}$ に対して一様に成り立つことを意味する。ここで m は実数上のルベーグ測度とする。

現在のところ、写像 $T: M \rightarrow M$ に対する局所中心極限定理の結果がいくつか知られている。例えば、1983 年に Rousseau-Egele は Nagaev の摂動理論を用いて、 $[0, 1]$ 区間上の Lasota-Yorke 写像 T とこれに不変な絶対連続な測度 μ と有界変動な実数値関数 g から生成される定常確率過程 $\{g \circ T^n; n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$ に対して局所中心極限定理を示した。その後、1988 年に Guivarc'h と Hardy は、この Rousseau-Egele の結果を一般化してアノソフ微分同相写像とギブス測度 μ 、Hölder 連続関数 g に対して局所中心極限定理を示した。これらの結果は、関数 g が aperiodic と呼ばれる条件を満たすことが仮定されている。盛田は 1989 年に Rousseau-Egele の結果を aperiodic ではない、periodic と呼ばれる性質を満たす有界変動関数 g に一般化した。これを一般化された局所中心極限定理と呼ぶ。その後 2001 年に Aaronson-Denker らによって Guivarc'h-Hardy らの結果に対して一般化された局所中心極限定理が示された。また最近の結果として、2005 年に Gouëzel が非一

様拡大的な力学系に対して局所中心極限定理を示した。

しかしながら、半流の場合、1973 年の Ratner の結果など中心極限定理に対する結果はいくつか知られているが、(一般化された) 局所中心極限定理が成立する十分条件は殆ど知られていない。もちろん現在のところアノソフ流に対してもわかってない。本研究では混合性を含めたいいくつかの条件を仮定して、Rousseau-Egele が用いた遷移作用素に対する Nagaev の摂動定理を遷移作用素の半群に対して当てはめることによって、連続時間での力学系に対する一般化局所中心極限定理を示した。加えて $\sigma = 0$ となるための実数値可測関数 g の必要十分条件が、 $g = \frac{d}{dt} \ell \circ S_t|_{t=0}$ を満たすある可測関数 ℓ が存在することであることも示してある。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 由 利 美智子

副 査 教 授 津 田 一 郎

副 査 教 授 辻 井 正 人 (九州大学大学院

数理学研究院)

学 位 論 文 題 名

A generalized local limit theorem for mixing semi-flows

(混合的半流に対する一般化された局所中心極限定理に関する研究)

岩田氏が学位論文において発表した、ランダム力学系のアイディアを一般的な時系列解析に応用するうえで、強力な情報を提供すると思われる結果は、以下のように述べられる。

「滑らかなコンパクトリーマン多様体 M 上で定義された半流 $S_t: M \rightarrow M$ ($t \geq 0$) に対し、 S_t で不変なボレル確率測度に関する局所中心極限定理が十分広い観測関数 g のクラスにおいて成立する為の十分条件を、半流に関するペロンフロベニウス作用素がスペクトルギャップを持つような関数空間の存在として捕らえ、具体的にその関数空間を構成した」

ここで、定常過程 $\{g \circ S_t: t \geq 0\}$ が局所中心極限定理を満たすとは、正規分布への収束が密度関数の収束として捕らえられる事を意味し、中心極限定理よりは強い統計的性質と言える。現時点では、離散写像のクラスにおける結果しか知られておらず、(semi-) flow に関する結果としては、最初の成功例である。

論文において、主定理が適用可能な具体例として、 S' 上の一様拡大的写像が base Transformation であり、天井関数が滑らかな (弱) 混合性を満たす suspension flow が紹介されているが、今後の展開として混合性・従って時間相関関数の減衰のオーダーが指数的である事と、ペロンフロベニウス作用素のスペクトルギャップの関連性が新しい観点から明らかにされる事が期待される。

従って、著者は北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格があるものと認める。