博　士（理　学）　山　内　雄　介

学 位 論 文 題 名

Global Existence and Nonexistence of Solutions for a Reaction-Diffusion System

（反応拡散方程式系における時間大域解の存在・非存在について）

学位論文内容の要旨

時間変数を含む微分方程式においては、解が時間無限大まで大域的に存在する場合と、有限時間で解や解の微分が発散してしまい時間大域的には解が存在しない場合とがある。一般に、後者の現象を「解の爆発」と呼ぶ。本研究では、ある反応拡散方程式の連立系における解が、時間大域的に存在する解か爆発する解かについて考察する。

半線型の反応拡散方程式 $u_t - \Delta u = u^p$ $(p > 1)$ については、1966年にH.Fujitaにより時間大域解の存在・非存在のための冪 p の条件が示されている。N を空間次元とする。このとき、もし $p > 1 + 2/N$ であれば、十分小さい初期値に対しては時間大域解が存在し、十分大きい初期値に対しては時間大域解は存在しない。また、もし $p < 1 + 2/N$ であれば、任意の初期値に対し時間大域解は存在し得ない。なお、臨界冪のとき、つまり $p = 1 + 2/N$ の場合は、Hayakawa(1973)やKobayashi-Sirao-Tanaka(1977)やWeissler(1981)らにより、時間大域解は存在し得ないことが示されている。これらの結果を始めとして、反応拡散方程式の爆発解の解析は近年活発に進められてきた。

単一種からなる固体の化学物質の燃焼現象は、温度と質量の分布を未知関数とした２本の反応拡散方程式の連立形で記述される。この連立形における非線型項は未知関数の冪乗や指数関数からなっており、本研究で扱う方程式系はその非線型項の振る舞いを解析するための１つのモデルとして位置付けられる。また、このように未知関数が温度分布を表す場合、解の爆発は発火現象、爆発時刻は発火時刻、爆発集合は発火点に相当する。

本研究では次の反応拡散方程式の初期値問題について考察をする。

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |x|^{\sigma_1} u^{p_1} v^{q_1} \\ v_t - \Delta v = |x|^{\sigma_2} u^{p_2} v^{q_2} \end{cases}$$

この方程式系において、正値解が時間大域的に存在・非存在するための６つの冪 σ_j, p_j, q_j $(j = 1, 2)$ の条件を示し、その臨界点を明らかにした。また、６つの冪が丁度臨界点にある時には、時間大域解が存在しない事も明らかにした。

まず初めに、時間局所解の構成するが、その際には逐次近似法を用いる。本研究で扱う反応拡散方程式系は、非線型項が「空間変数の冪乗」と「２つの未知関数の冪乗」の積をなしている。このため、解の属する関数空間は、一様有界な関数の空間や空間遠方で多項式程

度の減衰を持つ関数の空間だけではなく、空間遠方で多項式程度の増大度を持つ関数の空間も扱う必要がある。その関数空間に合った形の解の不等式評価を新たに考案することで時間大域解の存在証明を行った。

続いて、時間大域解を構成する。方程式系に比較原理が適用できるため、時間大域的な優解を構成する事により、先程得た時間局所解から時間大域解の存在を証明する。空間変数の冪が付いていない非線型項 $u^{p_j}v^{q_j}$ $(j=1,2)$ に関しては、Escobedo-Levine (1995) が同様の手法で時間大域解の存在を証明している。しかし、本研究の非線型項では、上でも述べたように解の存在する関数空間を変える必要があり、それに合った新たな優解を構成することで問題を解決した。また、非線型項が未知関数に対しリプシッツ性を有しているときには、縮小写像の原理を用いて時間大域解の存在とその一意性も示せる。空間変数の冪は付いているが未知関数の冪が1つの非線型項 $|x|^{\sigma_1}u^{q_1}, |x|^{\sigma_2}v^{p_2}$ $(q_1,p_2>1)$ に関しては、Mochizuki-Huang (1998) がこの手法で時間大域解の存在とその一意性を示しているが、本研究では非線型項に未知関数が2つとも含まれていることにより、解の空間・不等式評価を非線型項に合うよう変形し問題を解決した。

一方、時間大域解の非存在を示す際には、「Kaplan の方法」と呼ばれる手法を応用する。この手法は、時間変数のみを変数として持つ補助関数を用いて、偏微分方程式を常微分方程式に変形し解析を行う手法であるが、$\max(p_1,q_2)<1$ と $\max(p_1,q_2)>1$ の場合で応用の仕方が異なる。$\max(p_1,q_2)<1$ の場合には、2本の方程式の相互作用が解の爆発に影響を及ぼすことを考慮し、2本の偏微分方程式両方を常微分方程式に変形し得られた常微分方程式系を解析する。一方、$\max(p_1,q_2)>1$ の場合には、2本の方程式それぞれの自己増大が解の爆発に影響を及ぼすことから、1本のみの偏微分方程式を常微分方程式に変形し解析する。また本研究では、常微分方程式へ変形する時に用いる補助関数を改良することで、新たに sublinear の場合などにも適用を可能にした。

本論文の構成は、以下の通りである。Part1 では、時間大域解存在定理を示す。主結果を Section2 で述べた後、はじめに Section3 で時間局所解存在定理を示す。次の Section4 で方程式系の優解の構成し比較原理を Section3 で得た局所解に対し用いて、時間大域的を構成する。また Section5 では、非線型項が未知関数に対しリプシッツ性を有しているときに、縮小写像の原理を用いて時間大域解存在と一意性を示す。一方、Part2 では時間大域解の非存在定理を示す。主結果を Section7 で述べた後、まず Section8 にて証明に不可欠な不等式評価をいくつか準備する。その後、Section9 では「2本の方程式の相互作用による解の増大」により解が非存在となる場合、Section10 では「1本の方程式のみによる解の自己増大」により解が非存在となる場合の証明を行う。各 Section で補助関数を定義し、偏微分方程式を常微分方程式に変形し解析を行う。Part3 では、Part1 と Part2 の結果を (1) $p_1<1$, $q_2<1$, (2) $p_1>1$, $q_2<1$, (3) $p_1<1$, $q_2>1$, (4) $p_1>1$, $q_2>1$ の4つの場合に分けまとめる。

学位論文審査の要旨

主　査　准教授　津田谷　公　利
副　査　教　授　神　保　秀　一
副　査　教　授　小　澤　　　徹

学 位 論 文 題 名

Global Existence and Nonexistence of Solutions for a Reaction-Diffusion System

（反応拡散方程式系における時間大域解の存在・非存在について）

固形燃料の燃焼現象を記述する反応拡散方程式はこれまでに様々な研究結果が得られている．そのモデルを簡略化した単独方程式の中で，非線型項が冪乗タイプである方程式については１９６０年代半ばFujitaによって時間大域解の存在と非存在が示された．その結果は，非線型項の冪と空間次元との関係によって解の挙動が変わってくるということ，つまり，時間大域解が存在する場合や存在しない場合があるということである．さらに時間大域解存在と非存在を分ける冪についての臨界値が明らかになった．この結果を出発点としてその後反応拡散方程式研究が大きく進展した．非線型項の冪が臨界値に等しい場合は，Hayakawa, Kobayashi-Sirao-Tanaka, Weissler により時間大域解が存在しないことがわかっている．さらに有界領域の場合や初期値境界値問題についても研究が盛んに行われている．

１９９０年代に入ると，反応拡散モデルをやや複雑にした場合，すなわち連立方程式の場合を扱う研究が始まった．この連立方程式の未知関数は燃焼現象における物質の質量と温度分布を表す．まず，１９９１年にEscobedo-Herreroが弱い相互作用のタイプである非線型項に対し，時間大域解の存在と非存在を示した．１９９５年にはEscobedo-Levineが強い相互作用のタイプである非線型項に対し時間大域解の存在と非存在を示した．この結果によって，強い相互作用では非線型項における未知関数の自己増大度が解に影響を及ぼすことが明らかになった．１９９８年になると，弱い相互作用のタイプで冪乗型空間変数係数の非線型項に対し，Mochizuki-Huangが時間大域解の存在と非存在を示した．これら３つのタイプを統合した非線型項の場合，つまり強い相互作用のタイプで係数が空間変

数の冪乗である非線型項については未解決問題として残されていた．統合型の非線型反応拡散モデルを解析する手法の開発は反応拡散研究を進展させる上でも重要課題である．

著者はこの統合型の非線型項をもつ反応拡散方程式系について時間大域解の存在と非存在を示した．また，それぞれの結果が成り立つための，非線型項の未知関数および空間変数の冪についての条件を明らかにした．結果の証明の中で最初の工夫は時間局所解の構成に見られる．これまでに知られている研究結果では非線型項が定数係数であるか，または弱い相互作用のタイプであるため空間無限遠方で多項式程度の減衰をもつ関数を扱えば十分であった．これに対し，統合型の場合，非線型項の特徴から空間無限遠方で多項式程度の増大度を持つ関数を扱わなければならない．著者は適切な解空間を導入し，それに合った解の評価式を求めることで時間局所解の存在を示すことができた．

時間大域解の存在については，証明で比較原理を用いるので時間大域的優解を構成する必要がある．従来の方法とは異なり，上で述べた解空間に合った新しい優解を導くことによって存在証明が可能になった．ただし，この結果では非線型項が劣線型の場合も含んでいるので時間大域解の一意性は一般には期待できない．非線型項が優線型の場合は時間大域解の一意性が成り立つことを著者は証明している．この証明の中でも時間局所解の存在証明と同じように新しい解空間を定義し，それに合った解の評価式を導き出すという工夫が見られる．これらの新しい解空間とそれに対する解の評価式は著者自身によって見つけ出されており高く評価できる．

時間大域解の非存在についての証明は今までに使われてきた手法を土台としている．ただし，この手法はそのままでは適用できない．非線型項に含まれている未知関数の冪と解の性質との関係に着目し，未知関数の冪について場合分けすることによって１つの方程式のみを，あるいは両方の方程式を常微分方程式に変形する方法を考え出した．また，これまでに使われていた補助関数の改良という工夫をすることによって劣線型の場合への応用も可能になった．

このようにして示された時間大域解の存在，非存在，それぞれの場合における非線型項の未知関数，空間変数の冪についての条件を比較してみるとこれらの条件は最良であることがわかる．しかも，今までに知られている研究結果の条件を含んでいる．したがって，過去の研究結果が自然な形で含まれることになり，著者は優れた結果を示したと言える．

これを要するに，著者は，反応拡散方程式系について解の評価式の新知見を得たものであり，非線型偏微分方程式論の発展に貢献するところ大なるものがある．

よって著者は，北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める．