博士（理　学）　袁　　　暁　輝

学位論文題名

Heterogeneity-induced defect bifurcation and pulse dynamics for a three-component reaction diffusion system

（３種反応拡散方程式系の非均一様媒質における進行パルスのダイナミクス）

学位論文内容の要旨

Spatially localized patterns such as pulses and spots are fundamental objects arising in many dissipative systems . One of the recent remarkable discoveries is that there is a class of localized patterns which displays a variety of dynamics such as elastic ball-like behaviors upon collision, self-replication, self-destruction and spatio-temporal chaos. This makes a sharp contrast with well-known classical excitable waves as in the FitzHugh-Nagumo (FHN) equations in which annihilation are typically observed upon collision. One of the origins of such rich behaviors is that the pulses have potential instabilities that display a variety of dynamics when parameters are tuned appropriately. For instance, saddle-node structure causes self-replication or self-destruction, and drift bifurcation is responsible for the onset of traveling motion. Moreover a singularity of codim 2 type, i.e., a system has a parameter where multiple bifurcations simultaneously occur, is known to be responsible for the variety of outputs for scattering process.

Here we study the dynamics of pulses when the media is changed from homogeneous to heterogeneous, especially focused on the case that one of the kinetic coefficients changes like Heaviside function but smoothly. Note that the pulses treated here are asymptotically stable in homogeneous media, however we assume that the associated parameter values are located close to the singularities such as drift, saddle-node, and Hopf bifurcations. One of the consequences of this assumption is the enhancement of sensitivity to the perturbations: for instance, if there is a traveling pulse close to the drift bifurcation, its profile is almost symmetric and easy to deform from the right-going pulse to the left-going one by the external perturbations, which actually occurs when two slowly traveling pulses collide, interact weakly, and bounce off. A similar thing occurs when the pulse encounters the heterogeneity as will be discussed and much more exotic dynamics are created than the well-studies case for the FHN equations and the front case.

To be specific, we employ the three-component reaction diffusion system as an representative model and consider the case in which one of the kinetic parameters k_1 changes abruptly around a point. Our previous paper discusses a similar problem as above for the Gray-Scott(GS) model and showed various pulse dynamics including rebound and splitting depending on the height and slope of the heterogeneity for the removal rate k. A big difference between the GS model and the three-component model is the dependency of the background state on the kinetic parameter. Here the background state is the rest state for mono-stable system after introducing heterogeneity. For the GS model, background state (1,0) is independent of k, therefore it remains a common constant state before and after the jump point. On the other hand, since heterogeneity is introduced in an additive way for three-component model, there are no such common constant states for our system. Therefore it is not a priori clear that there exists a smooth stable background state connecting two different constant states on the whole region called the defect, in fact it is not always the case. Such defects, if exist, turn out to be coexistent in general for a fixed set of parameters. We particularly focus on the case that the traveling pulse collides with the small defect The defect branch consisting of its global continuation with respect to the height of the jump and k_1 plays a key role to understand the output when the pulse hits the heterogeneity. When the heterogeneity is spatially localized like Gaussian distribution, heterogeneity-induced stationary and oscillatory patterns were studied in detail by Dr. Li for the Fitzhugh-Nagumo system and integro-differential equations. They found several interesting heterogeneity-induced bifurcations including pulse-generator, however they don't consider how the traveling pulses interact with those structures. The main theme of this paper is firstly to study existence and stability of defects, and secondly to investigate the dynamics of traveling pulses of three-component model that encounter with the defects created by the heterogeneities of jump type. There are five different outputs depending on the parameters: penetration, rebound, annihilation, oscillation, and steady state. A remarkable thing is that there are unstable steady states which act as separators near the boundary of penetration-rebound regions. The role of them is exactly the same as scattors for the case of head-on collisions of two traveling pulses discussed by our previous work . Moreover we show that those unstable patterns can be obtained as a global continuation of defects with respect to the jump size.

学位論文審査の要旨

主　査	教　授	西　浦　廉　政
副　査	教　授	津　田　一　郎
副　査	教　授	中　村　　　玄
副　査	助教授	坂　上　貴　之

学 位 論 文 題 名

Heterogeneity-induced defect bifurcation and pulse dynamics for a three-component reaction diffusion system

（3種反応拡散方程式系の非均一様媒質における進行パルスのダイナミクス）

自然界におけるパターン形成は時間と空間の非常に広い範囲のスケールにわたる。実際ナノスケールから宇宙の銀河形成まで様々な規模で形成されている. 自然界のパターン形成の記述には反応拡散方程式がしばしば用いられ、空間的に等方である場合にはその拡散係数やキネティックスは空間方向に一様であり、そのような系においてゆらぎから空間非一様な周期パターンが安定に出現することを発見したのが Alan Turing であった。しかし媒質が完全に空間一様であることは理想化であり、実際の系においては微小な不均一性が常に存在する。そのような不均一性がパターンダイナミクスにどのような影響を与えるかについては若干の先駆的仕事はあるが、ほとんど未開拓である。とりわけそのような不均一性が媒質にディフェクトを生じる系についての研究はこれまでなかった。本研究は, 空間1次元の場合において不均一性がジャンプ型、すなわちある1点の近傍で媒質が跳びをもち、かつ系がそこでディフェクトを有する場合について、進行波パルスのダイナミクスを調べ、それを駆動している数理的機構を大域分岐の立場から明らかにしたものである。モデル系はガス放電系を定性的に記述する3種反応拡散方程式系を採用する。このモデル系では不均一性が加法的に導入されるため、ディフェクトとよばれる空間非一様定常解が出現する。従って扱う問題は進行パルスとディフェクトとの衝突問題を考えることに等価となる。この点がこれまでよく研究されてきた Gray-Scott モデルと大きく異なる点である。

上記の設定のもと安定な進行パルスが存在するパラメータ領域において数値実験を行ない, ジャンプの高さおよび基準点の位置を変化させることによりパルスの振る舞いは定性的に5つのクラスに分かれることを明らかにした. ジャンプの高さの絶対値が低いときは, 進行パルスはジャンプを乗り越えて進行する (Penetration) ことができる. ジャンプの高さの絶対値が大きくなると, 進行パルスは高さが正 (jump up) の場合は、その大きさが増えるにつれ、反射 (Rebound)、そして消滅 (Annihilation) となる。高さが負 (jump down)

の場合は反射が起こり、次にディフェクト付近で振動（Oscillation）状態、そして定常（Stationary）状態へと推移する。最後の振動および定常状態はパルスがディフェクトのところに存在する安定解に捕捉（Pinning）された結果である。

これらのダイナミクスを理解する上で、あるクラスの不安定定常解（scattor と呼ばれる）が重要な役割を果たすことが本研究で明らかにされた。ディフェクトの付近で通過か反射のどちらが生じるかは、それを仕分ける峠点に相当する不安定定常解が存在し、その安定多様体のどちらのサイドを軌道が通るかにより、通過か反射かが決まることが判明した。有限次元系においてはこのような鞍点型の不安定解がセパラトリックスの役割を果たすことはよく知られているが、偏微分方程式系のような無限次元系においては、全く自明でない。さらに大域分岐の手法により、著者は上に述べたディフェクト、不安定定常解、さらに進行パルス解がパラメータ空間において、連結していることを数値的に明らかにした。これは不均一系ダイナミクスに関与するすべての重要な解が無関係ではなく、解の枝としてはつながっていることを示しており、極めて注目に値する結果である。またここで得られた結果は周期型、ランダム型をはじめより一般な空間非一様性媒質に拡張可能なものとなっている.

以上より、著者はパルスの不均一媒質における運動について、ディフェクトの存在、パルスとディフェクトの衝突ダイナミクス、さらにそれを駆動する隠れた不安定解の存在を明らかにし、不均一な媒質におけるパターンダイナミクスの進展に寄与するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。