

Pieri's formula for generalized Schur polynomials

(一般化されたシューア多項式におけるピエリ公式)

学位論文内容の要旨

本論文では, generalized Schur operators について論じる. 特に, generalized Schur operators を用い定義される Schur polynomial の一般化に対し, Pieri's formula の類似の公式を示し, また, rooted planer binary tree を用いた新しい generalized Schur operators の例を導入する.

Schur 多項式は Young diagrams によってパラメトライズされた対称多項式である. 一行のみからなる Young diagram に対応する Schur 多項式は斉次完全対称多項式であり, 一列のみからなる Young diagram に対応する Schur 多項式は基本多項式である. Schur 多項式は表現論などにおいてしばしば重要な役割を果たしている. 例えば, Schur 多項式は特殊線形群の既約指標を与えている. また, 対称関数環の基底を与えている. この様に様々な意味を持つ Schur 多項式であるが, その定義も同値な定義がいくつか知られている. その一つとして, 我々は Schur 多項式を semi-standard Young tableaux の重み付き母関数として定義する事が出来る. この様な組合せ論的な定義から, Pieri's formula などの Schur 多項式の組合せ論的な性質を導く事が出来る. ここでいう Pieri's formula とは以下のような物である:

$$\sum_{\mu} s_{\mu}(t_1, \dots, t_n) = h_i(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n),$$

ただし, 左辺の μ は μ/λ が i 箱からなる horizontal strip になる様な Young diagram を全て動き, $s_{\mu}(t_1, \dots, t_n)$ は Young diagram μ に対応する Schur 多項式, $h_i(t_1, \dots, t_n)$ は i 次斉次完全対称多項式を表す. 同様な公式は, 様々な対称多項式の族で知られている.

Young diagrams 全体のなす半順序集合の束は Young's lattice と呼ばれている. Young's lattice の Hasse graph における 最小元から始まる path は standard Young tableaux と同一視する事が出来る. また, Robinson 対応と呼ばれる, standard Young tableaux のペアと対称群との間の一対一対応がよく知られている. 言い替えると, Robinson 対応とは Young's lattice の Hasse graph における 最小元から始まる path のペアと対称群との間の一対一対応のことである.

一方で, Young's lattice は Stanley によって導入された differential poset の prototypical な例である. Differential poset とはその Hasse graph の上り演算子と下り演算子がある交換関係を満たす graded poset のことである. ある graph の上り演算子とは, 頂点集合を基底とするような線形空間上の線形写像であってある頂点をその頂点を始点とする辺達の終点を足しあげたものに対応させるもののことであり, 下り演算子とは, 頂点集合を基底と

するような線形空間上の線形写像であってある頂点をその頂点を終点とする辺達の始点を足しあげたものに対応させるもののことである。Robinson 対応に相当する対応が, Fomin によって differential poset やその一般化である dual graphs においても構成されている。

さらに, Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれる semi-standard Young tableaux のペアとある行列との間の一対一対応も知られている。Standard tableaux の時と同様に, semi-standard Young tableaux も頂点が Young diagram であるようなあるグラフにおける path と同一視する事が出来る。Fomin は generalized Schur operators を導入した。Path を semi-standard Young tableaux と同一視する事が出来るようなグラフの上り演算子と下り演算子は generalized Schur operators の prototypical な例である。Dual graph における Robinson 対応の構成と同様の手法を用いて, Fomin は generalized Schur operators において Robinson-Schensted-Knuth 対応を構成した。この意味で, generalized Schur operators は semi-standard Young tableaux の一般化であると考えられる。

我々は, generalized Schur operators を用いて Schur polynomials の一般化に相当する多項式を定義する。Prototypical な例においては, この多項式は Schur 多項式もしくは skew Schur 多項式に他ならない。我々は Pieri's formula に相当する等式が Schur polynomial の一般化に相当する多項式にも成立していることを示す。

また, 根付き平面二分木を用いた generalized Schur operators の例を構成する。我々は, 根付き平面二分木を頂点とするグラフを二種類定義する。その内の一方のグラフの上り演算子ともう一方のグラフの下り演算子が generalized Schur operators となっている事を示す。これらの内の一方のグラフにおける最小元 (空集合) からの path は binary-searching labelling と呼ばれる根付き平面二分木上のラベリングと同一視する事が出来る。また, もう一方のグラフにおける最小元からの path は right-strictly-increasings と呼ばれる根付き平面二分木上のラベリングと同一視する事が出来る。この例によって得られる Schur polynomial の一般化に相当する多項式は特殊な場合には, binary-searching labelling や right-strictly-increasings の重み付き母関数として書く事が出来る。よく知られた generalized Schur operators の例達における Schur polynomial の一般化に相当する多項式が対称多項式であるのに対し, 根付き平面二分木による例における多項式は一般に非対称である。

Young diagrams における transpose という操作に相当する, 平面二分木にも左右を入れ換えるという操作が存在する。定義した二種のグラフの内の一方の下り演算子と, もう一方のグラフにこの左右を入れ換えるという操作を用いて得られるような, 別のグラフの上り演算子が, また別の generalized Schur operators となっている事も示す。

学位論文審査の要旨

主査	助教授	齋藤	睦
副査	教授	寺尾	宏明
副査	教授	山下	博
副査	教授	吉田	知行

学位論文題名

Pieri's formula for generalized Schur polynomials

(一般化されたシューア多項式におけるピエリ公式)

シューア多項式は、特殊線型群の既約指標であり、また、対称多項式環の基底でもあることから表現論、組合せ論において重要な対称式で、様々な分野の研究者から興味を持たれている対象である。シューア多項式の満たす重要な関係式のなかに、シューア多項式と完全対称式の積を再びシューア多項式の和で記述するというピエリ公式や、異なる変数に関するシューア多項式の積の和が簡単な有理関数の積で表せられるというコーシーの恒等式というのがある。シューア多項式はヤング図形でパラメトライズされている。(ヤング)標準盤はヤング図形の成長の過程を表し、標準盤のペアはヤング図形全体(ヤング束)のなかで、最小元を始点とするループと考えられる。ヤング図形に関わる幾つかの組合せ的結果は、ヤング束のなかで上り演算子と下り演算子が満たす交換関係式に由来することが多い。

このような観点からヤング束の一般化として、スタンレーが differential poset, さらにその一般化としてフォミンが双対グラフという概念を導入し、フォミンはロビンソン対応の一般化等を示している。さらにフォミンは半標準盤のペアに関するロビンソン・シェーンステッド・クヌス対応の構成に関連して、より一般の次数付ベクトル空間において上り演算子や下り演算子を考えた。そこでの上り演算子や下り演算子の母関数の積は一般化されたシューア演算子と呼ばれ、その展開係数が表題の一般化されたシューア多項式である。これは、通常のシューア多項式や歪シューア多項式の一般化になっている。

このような状況の下、一般化されたシューア多項式においてもピエリ公式やコーシー恒等式に相当する公式が成り立つことの証明が待たれていたが、本論文において著者が証明した。これにより、今まで知られていた幾つかのピエリ型の公式、コーシー型の恒等式の統一的証明が得られたと同時に、新たな例においては、それらの公式を新たに示したことになる。

本論文では、新たな例の一つとして根付き平面二分木に関わるものを提示している。今まで知られていた多くのシューア多項式の一般化に反して、この例において、対称多項式でない一般化されたシューア多項式を得ていることは大変興味深い。このように、根付き平面二分木の例においては、今まで良く知られていた例と大きく異なる点もあるが、一方では、転置に相当する操作が存在することや、半順序集合上のイデアルを使った記述ができることなど、ヤング束と共通する点も多い。従って、根付き平面二分木の例の研究はこれらを統一的に研究するための道標を与えるものとしても重要である。一般化されたシューア多項式が対称多項式となるような例においては Lam のハイゼンベルグ代数の表現論からの理論と繋がるのが分かっている。一方、二分木の例については、Hibert, Nzuechap, Rey らのホップ代数からの研究と密接に関連している。

と思われ、今後の研究の発展が期待されている。

このように、著者による上記の成果は、表現論、組合せ論及び関連する理論において大変重要なものである。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。