博士（理　学）　長　瀬　優　子

学 位 論 文 題 名

A singular perturbation problem arising from phase field model

（フェイズフィールドモデルから生じる特異摂動問題）

学位論文内容の要旨

We study the motion of interface and the process of the formation of the interface which appear in several fields of science, for example, the surface of crystal and the interface between two phases, such as gas and liquid. This study is fundamental to comprehend the various pattern formation in nature, like crystal growth. The motion and formation of interface are represented by various kinds of partial differential equations. This thesis deals with three kinds of problems.

In part I, we study the surface evolution equation which appears in the crystal growth, especially, curvature equation which has "anisotropy" for the direction of the velocity of the evolution of surface. "Anisotropic" is a certain generalization of "isotropic" and property which the surface grows rapidly in some direction and slowly in other direction. It is necessary to consider this "anisotropy" in the problems of the crystal growth. But to consider anisotropic curvature flow is more complicated than isotoropic curvature flow, namely, mean curvature flow.

We consider the case that the surface is represented by the graph to overcome the difficulties of "anisotropic". As our main result, we show the interior gradient estimate in 1-dimension.

For the proof, we extend the result obtained by S.B. Angenent that "the number of zeros of the solution of the 1-dimensional heat equation decrease in time," to be able to apply to the anisotropic curvature flow equation.

In part II, we use the method that the interface approximate the interface which has the width and we regard the interface as the limit interface as its width tend to 0. We use the geometric measure theory to capture the interfaces.

In chapter 2, we consider the 2-phase field model which is dominated by the effect of the surface tension. In this problem, we use the Modica-Mortola energy functional,

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon|\nabla u|^2}{2} + \frac{W(u)}{\varepsilon}\right) dx \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain and W is a standard double-well potential. The solution u_ε of the minimization problem of this energy among u_ε with a volume constraint satisfies the following Euler-Lagrange equation,

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + \frac{W'(u_\varepsilon)}{\varepsilon} = f_\varepsilon \qquad \Omega, \tag{2}$$

where f_ε is Lagrange multiplier associated with the volume constraint of u_ε. It is well-kown that the interface of minimizer converge to the minimal surface and f_ε converges to a constant mean curvature of the limit interface as $\varepsilon \to 0$. We consider not only minimizers but also the solutions of (2). We prove if the energy E_ε and $\varepsilon^{-1}\|f_\varepsilon\|_2$ are uniformly bounded, then limit interface is rectifiable and f_ε converges to the mean curvature of the limit interface as Radon measure in dimension 2.

In chapter 3, we apply the approach in chapter 2 to the minimization problem of the Allen-Cahn action. This minimization problem occurs from the probability of switching interface corresponding to Allen-Cahn equation with white noise. Although the occurence of this minimization problem is different from the origins of the phase field model which we considered in chapter 2, the method is also useful. Lately, R.V.Kohn, M.G.Reznikoff and Y.Tonegawa gave a complete description of the minimum of the Allen-Cahn action with a standard double-well potential in the space dimension 1. We solve the minimization problem of the Allen-Cahn action with a double-well potential whose depths are different.

Chapter 1 and 2 are joint works with Professor Y.Tonegawa. Author of this thesis mainly constructed the special solution and maximum principle in chapter 1. In chapter 2 author mainly constructed monotonicity formula and partly proved rectifiability of the limit interface.

学位論文審査の要旨

主　査　助教授　利根川　吉　廣
副　査　教　授　小　澤　　徹
副　査　教　授　神　保　秀　一

学位論文題名

A singular perturbation problem arising from phase field model

(フェイズフィールドモデルから生じる特異摂動問題)

著者は変分法に起因する非線形偏微分方程式、特に楕円型、放物型の方程式について研究した。その研究テーマは（1）グラフとして表される曲線の非等方的曲率流下における勾配評価、（2）相分離現象を描写するフェイズフィールド法における特異摂動問題、（3）マイクロマグネットのスイッチング確率に関係した汎関数の最小化問題、の3つにわたる。

（1）は結晶など表面張力に方向依存性がある場合の曲率流を考えたもので、特に曲線がグラフとして表される場合を対象としている。主結果は、非等方的曲率流によって変形したグラフの勾配は、初期時間における曲線のグラフの高さと経過した時間のみによって評価する事が出来、初期時刻の勾配には依存しない、というものである。非線形放物型方程式においては勾配の評価が得られることによって高階微係数もすべて評価できる為、基本的かつ重要な結果である。この結果は等方的曲率流に関してはすべての空間次元で知られていたが、非等方的な場合では初めてのものである。

（2）では、2相分離状態を表す Ginzburg-Landau 型のエネルギーを考える。その中に入るパラメター ε は界面領域の厚みを表す数である。ε を0に収束させたときにはこのエネルギーは2相分離界面の曲面積を表すものであり、エネルギーは界面面積汎関数に Γ －収束する事が知られていた。一方で Γ －収束はエネルギー最小解についてのみの知見を与え、より一般的な局所エネルギー最小解や、メタ安定な解についての知見は得られない。2相分離現象においては後者の解は非常に重要であり、また時間的に変化する問題である Allen-Cahn 方程式や Cahn-Hilliard 方程式の理解においても Γ －収束の枠組みでは不満足である。著者はエネルギー及び、界面領域の曲率の2乗積分にあたると思われる量が有界である場合、界面領域が常に界面的な集合に収束する事を厳密に示した。手法は幾何学的測度論と非線形偏微分方程式理論を駆使したものであり、著名な数学者である De Giorgi が1970年代に提案した問題への解答であることを考えても優れた結果である。この結果の応用は例えば Allen-Cahn 方程式の解が平均曲率流に収束するという Ilmanen の結果（1993年）に対して極めて簡潔な証明を与えるために使われるなど、数理的な界面現象問題に対する深い貢献を成すものである。

（3）は元々マイクロマグネットの熱ノイズによるスイッチング現象を描写するために考えられた問題である。（2）の問題で考えられた Ginzburg-Landau 型エネルギーの勾配流に熱ノイズを入れる。初期時間に一様な安定状態においてあったとしてもノイズによってもう一つの安定状態に遷移する0でない確率があるのであるが、そのノイズ0極限における確率を計算する為には大偏差原理を用いる事が出来る。色々な時空スケールが考えられるのであるが、

特に空間的な非一様性を利用した遷移方法がもっとも確率的に起こりやすいスケールがある。このスケールで考える作用汎関数は核生成コストと界面の輸送コスト及びこのスケールにおける時間的な制限の釣り合いによって核生成個数が決まるという興味深いものである。著者は二つの安定相のポテンシャル高が異なる場合、作用汎関数の最小値および最大確率遷移状況について研究した。これはポテンシャル高が等しい場合の自然な拡張になっており有意義で新しい結果である。

以上のように著者の研究は非線形解析に対して十分大きなインパクトのあるものである。よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。