博士（理　学）　寺　澤　祐　高

学位論文題名

Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local L^p spaces and weak type (1,1) estimates of Hardy-Littlewood maximal operators

（一様局所ｐ乗可積分関数を初期値とするNavier-Stokes方程式とHardy-Littlewood極大作用素の弱（１，１）評価）

学位論文内容の要旨

本学位論文のChapter 1では、減衰しない初期値に対するNavier-Stokes方程式の初期値問題について扱い、Chapter 2, 3ではHardy-Littlewood 極大作用素の弱（1,1）型評価について扱う。以下、章ごとに内容を説明する。

Chapter1では、非圧縮性粘性流体の運動を記述していると言われるNavier-Stokes方程式の全空間における初期値問題について扱う。Navier-Stokes方程式の初期値問題の扱いとして、同方程式を積分方程式に直して時間局所的な滑らかな存在を言うという手法がある。本論文では、そのような扱いにより同方程式を一様局所p乗可積分関数の初期値（ただし、pは空間次元d以上の実数）に対して時間局所的に解いた。初期値の関数空間の広さとしては、Koch-Tataru ('01)の論文で扱われている初期値の空間に含まれるが、関数空間の定義が簡単なことや、Lemarier-Rieusett ('02) による一様局所２乗可積分を初期値とする弱解の構成の仕事との対応などから、このような関数空間で問題を取り扱うことは興味ある問題と思われる。また、この結果は、Cannon-Knightly ('70), Giga-Inui-Matsui ('99)の、本質的有界な初期値に対して、同方程式の初期値問題を考察した結果の自然な拡張にもなっている。一様局所 p 乗可積分関数とは、全空間における半径１のユークリッド球で関数の p 乗ノルムをはかり、球の中心を全空間で動かしたときのその量の上限が有限の関数をいう。また、それら全体からなる線形空間にノルムとして前記の量を付随させた空間は一様局所 p 乗可積分空間と呼ばれ、バナッハ空間になっている。局所解構成の手法には、線形部分の評価と非線形部分の評価を一様局所 p 乗可積分関数に関して対して行うことが重要であるが、それらは、あるヤングの不等式に相当する定理を一様局所 p 乗可積分関数に対して得ることにより導いた。その不等式の証明は、合成積において現れる二つの関数をおのおの座標軸に沿った可算個の単位立方体に区切り、それで得られた任意の二つの関数の合成積の台の範囲に注意し、その合成積の評価に通常のヤングの不等式を用い、それらを足し合わせることで得られる。線形部分の評価と非線形部分の評価を局所解の存在証明に応用する仕方は、Fabes-Jones-Riviere ('72), T.Kato ('84) らの論文の手法と平行してい

る。ただし、コンパクト台を持つ滑らかな関数が一様局所p乗可積分空間で稠密でないなどの理由から、臨界状況の時の解の存在する初期値を任意の一様局所d乗可積分関数にとることは本研究ではできていない。

また、解の初期値への収束に関しては、任意の一様 p 乗可積分の初期値（ただし、pは次元より大きい）に関して、各コンパクト集合上 p 乗ノルムの意味で解が初期値に収束することを示した。また、有界一様連続関数全体の一様 p 乗空間の閉包に属する初期値に対しては、一様 p 乗ノルムの意味で解が初期値に収束することを示した。さらに、臨界状況においても、同様の事実を示した。

なお、第一章の内容は北海道大学の前川泰則氏との共同研究に基づいている。

第二章では、Hardy-Littlewood 極大作用素の弱（1，1）評価について扱った。近年の調和解析における研究で、複素解析の問題との関連から、二倍条件を満たさないような測度付き距離空間でさまざまな作用素の有界性を調べる研究が盛んである。本研究では、測度が二倍条件をみたす場合の極大作用素の弱（1，1）評価の作用素ノルムの評価を改良し、二倍条件を満たさない場合には、一般化された修正極大作用素を導入しその弱（1，1）評価を得た。定義から容易にわかるように非中心型極大関数のほうが中心型極大関数より小さくない。測度が二倍条件を満たすときは中心型極大作用素、非中心型極大作用素ともに、可積分空間から弱可積分空間への有界写像になっているが、中心型と非中心型の大小関係により中心型作用素と非中心型作用素の作用素ノルムにも大小関係がある。したがって通常、中心型極大作用素の有界性は、非中心型極大作用素の有界性から導かれるが、中心型極大作用素を直接評価することを考えることにより、よりよい評価が得られる可能性があろう。実際、本研究では、測度に連続性のあるような場合に弱（1，1）評価の定数が二倍定数以下になることを示した。証明には、測度に付随する外測度を用いており、可測性が一般にはないような集合の大きさをそれを用いて計っている。また、一般化された修正極大作用素についても同様の手法を用いることにより、弱（1，1）有界性の結果を得た。

第三章では、距離空間上における Hardy-Littlewood 極大作用素の弱（1，1）評価に対する離散化の方法について扱う。de Guzman ('81) は、ユークリッド空間上の極大作用素に対して、ディラックのデルタ関数の有限和に対して弱（1，1）有界性を示せば、関数の場合の弱（1，1）有界性がそれから従うこと、またその逆も示した。そして、彼はディラックのデルタ関数の有限和に対して弱（1，1）有界性を直接示した。また、Menarguez-Soria ('92) は、ユークリッド空間上定義される極大作用素を一般化したある作用素について、作用素ノルムの保存も込めて、上と同様のことを示した。そこで、本研究では、一般の測度付距離空間上の中心型極大型作用素に対して、それをディラック測度の有限和全体の上に作用させたときと、可積分関数全体の上に作用させたときで、作用素ノルムが等しくなることを示した。証明は、Menarguez-Soria の定理の証明の議論に基本的には沿っているが、一般の距離空間には群構造がないため、距離関数の対称性を巧みに用いている。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　小　澤　　　徹
副　査　　教　授　　儀　我　美　一（東京大学大学院
数理科学研究科）
副　査　　教　授　　神　保　秀　一
副　査　　教　授　　中　村　　　玄
副　査　　教　授　　相　川　弘　明

学位論文題名

Navier–Stokes equations with initial data in uniformly local L^p spaces and weak type (1,1) estimates of Hardy–Littlewood maximal operators

（一様局所ｐ乗可積分関数を初期値とする Navier–Stokes 方程式と Hardy–Littlewood 極大作用素の弱（１，１）評価）

非圧縮性粘性流体の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式の数学的研究、特に函数解析的研究は Jean Leray に始まり、７０年を超える大変長い歴史を持つものの、未だ完全な数学的理解には至っていない。

考える解のクラスが変わるとナビエ・ストークス方程式は数学的問題としての性格が変わる為、近年ますますナビエ・ストークス方程式の数学的研究は盛んになっている。考える解のクラスを変える事は、注目する物理現象、特に、注目する流体力学的現象を変える事に相当する為、ナビエ・ストークス方程式を様々な函数空間で論じる事は重要である。また、最近では、ナビエ・ストークス方程式に限らず、様々な発展方程式に対して、初期値問題の適切性が成立する最大の函数空間を決定する事を目的とした研究が世界的動向となっている。

本論文は、このような現況にあるナビエ・ストークス方程式の函数解析的研究において、その初期値問題を一様局所ｐ乗可積分函数の成す空間で研究したものである。この函数空間は空間遠方で減衰しない函数を含む為、空間遠方で減衰しない流速場を扱っている事に相当し、流体力学的にも大変重要なモデルを考えている事になる。

本論文の主結果は、ナビエ・ストークス方程式の初期値問題の時間局所的な適切性を、一様局所ｐ乗可積分函数の成す函数空間で、ｐが空間次元ｎを超えない場合に示した事である。これは、ｐ乗可積分函数の成す函数空間で適切性を示した加藤敏夫理論の自然な拡張となっている。一方、加藤理論を一様局所化するには、線型評価及び非線型評価をそれぞれ一様局所化する事が必要であり、既存の方法論はそのまま使えない事が困難な点であった。

著者は、この困難な点を実解析的な手法により解決し、ナビエ・ストークス方程式の研究に新たな道を切

り開く事に成功した。非線型偏微分方程式の数学的研究に対する貢献は大なるものである。
よって、著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。