

学 位 論 文 題 名

Scattering and inverse scattering problems
for nonlinear Klein-Gordon equations

(非線型クライン・ゴールドン方程式に関する散乱及び逆散乱問題について)

学位論文内容の要旨

本論文では非線型クライン・ゴールドン方程式(以下NLKG)に関する散乱問題及び逆散乱問題について考察する。NLKGは自由クライン・ゴールドン方程式(束縛されていない状態を記述している。以下FKGと略する)に摂動項(特定の束縛状態を記述している)が加えられた関数方程式である。NLKGは場の理論等で導出される重要な方程式であるが、純粹数学的観点から見ても非線型偏微分方程式論のみならず、他の分野(例えば関数空間論、リーマン幾何学)への刺戟を与え得る重大な方程式である。

【第一章・散乱問題】

第一章ではNLKGの散乱問題について考察する。

NLKGは恒常的な物理現象に由来していることが多い為、時間大域解の存在は肯定的に予測される。実際に摂動項に一定の条件を課せば解の時間大域的存在を証明することは容易である。そこで、より深く、「時間大域解はどのような振舞いをするのか?」という漸近挙動を考察していく。漸近挙動のタイプの一つとして短距離散乱が挙げられる。これは、NLKGの解が、時刻が十分に経過した後に、束縛されない自由な状態、即ちFKGの解に挙動している現象である。つまり、『時間の経過と共に、摂動項の影響が弱まり、最終的に影響は無視出来る』と解釈される。これと同義な概念は『FKGの解 ϕ_- を入射させると、それは摂動の影響を受け、非線型解になるが、時刻が十分に経過した後には影響が消え去り、異なるFKGの解 ϕ_+ となって反射する』状態である。 ϕ_- から ϕ_+ へ移す写像を散乱作用素という。散乱作用素の存在を示すことは短距離散乱の挙動を示すことに他ならない。

散乱問題は方程式の散乱作用素の有無を吟味する問題であり、方程式の時間大域解の存在、及びその一意性、更には解の漸近挙動を統括的に扱う分野である。

これまで、「摂動項に、適当な条件を課せば、ある定義域上で散乱作用素が定義出来る」ことが知られていた。ところが、既存の結果のままでは、ポテンシャルの条件を連続的に変更させていくと、それに伴う散乱作用素の定義域の条件が、突如不連続的に強くなるという問題点が残っていた。

本論文の第一章では上記の問題が解消されることを証明する。解決方策としては、関数空間の補間理論を用いることが挙げられる。これは、異なる2つの関数空間の「中間」に位置する関数空

間を解析することで、不連続さを解消しようとする取り組みである。そして、適切な関数空間に関する補間理論を用いることによって、先に述べた不自然さを解消し、なお且つ定義域の条件を弱くすることが出来た。これを概して言えば『時刻を無限大に経過させたときに、FKGの解に漸近する時間大域解』を導く初期データの条件を弱めることが出来た」となる。

【第二章・逆散乱問題】

本章では非局所的な非線型項を摂動項とするNLKGの逆散乱問題を扱う。

摂動項がどのような条件のときに、解はどのように振舞うのか、という疑問をより数学的表現に換言した問題が第一章で考察した散乱問題である。逆に、振舞い方の情報が十分に判明しているときに、摂動項の詳細な情報を得ようと試みる問題が逆散乱問題である。具体例としては、『摂動項の構成を担うポテンシャルは都合の良い関数空間に属していることは判明している。しかし、各位置におけるポテンシャルの値そのものは分からない。そこで入射と反射の組 (ϕ_-, ϕ_+) の情報を利用して不明な値を求める』等が挙げられる。

逆散乱問題はより数学的に表現すると「既知なる散乱作用素の性質から、摂動項のより具体的な性質を探り出す」となり、所謂逆問題の領域になるが、前述した散乱問題の更なる応用とも解釈され、時間大域解の更に詳しい性質を見出せる可能性を秘めている。

摂動項が局所的な非線型項であるときの逆散乱問題については既に結果があるが、非局所的な非線型項の場合は結果が無かった。

本論文の第二章では、申請者により初めて得られた非局所的な非線型項についての結果を紹介する。得られた結果は大きく分けて二つある。

第一の結果：既知なる散乱作用素と初期データからなる汎関数を“線型化”し、更に適切なテスト関数を適用させることにより、逆散乱問題における一意性定理が証明された。標語的に言えば「“非線型性”の度合いが一致していれば、非線型項は全く同じになる(同じ非線型現象と解釈出来る)」となる。

第二の結果：逆散乱問題の究極的目標は「既知なる散乱作用素の性質から、摂動項を再構成すること」である。通常、観測者が知り得る情報は散乱データ(ここでは (ϕ_-, ϕ_+) のこと)のみである。そのデータから、不詳であった摂動項を確定する、という経過からも見て取れるように、本目標は実験・観測の現場に於いて要求される事柄に最も密接している。残念ながら、第一の結果は本目標よりは弱い結果である。この問題に関し、既存の方法を大幅に改良することで、摂動項を再構成出来ることを初めて証明した。この証明には第一章に於いて紹介された手法も用いられている。

【第三章・補遺】

第一・二章に於いて用いた命題の中には、構成の煩雑さを回避する為に証明を略したものがある。本章では、これらの完全な証明を与える。

学位論文審査の要旨

主 査 助 教 授 津 田 谷 公 利

副 査 教 授 小 澤 徹

副 査 教 授 中 村 玄

学 位 論 文 題 名

Scattering and inverse scattering problems for nonlinear Klein-Gordon equations

(非線型クライン・ゴールドン方程式に関する散乱及び逆散乱問題について)

20世紀前半、イギリスの理論物理学者Hartreeはハートリー近似と呼ばれる、多電子系の波動関数を求める近似法を提案した。これは多電子原子に対する代表的な近似方法の1つである。この方法によると、波動関数はある非線型シュレディンガー方程式の解になる。その非線型項は非局所的相互作用を記述し、ハートリー項と呼ばれる。この方程式の相対論的な場合を扱うにはハートリー項をもったクライン・ゴールドン方程式を考える必要がある。本論文の前半はハートリー項をもつクライン・ゴールドン方程式および冪乗型の非線型項をもつクライン・ゴールドン方程式の散乱問題を考察している。散乱問題は散乱作用素が存在するかどうかを問題とし、方程式の解の無限の過去での状態と無限の未来での状態を比較する。したがって、散乱作用素の存在を証明するには方程式の時間大域解の存在および漸近自由の両方を示さなければならない。時間大域解が自由解のように振る舞うかどうかを解明するのは大変興味深く重要な問題である。

ハートリー型のクライン・ゴールドン方程式についての数学的研究は1980年ごろからMenzalaとStraussによって始まった。この方程式の特徴はハートリー項である三次合成積にポテンシャルが含まれていることである。著者はハートリー項に含まれるポテンシャルの無限遠方における減衰評価と散乱作用素の定義域との関係に着目した。ポテンシャルがある条件をみたすならば、ある定義域上で散乱作用素が定義できることは知られている。しかし、定義域を重みつきソボレフ空間で考える場合、これまでに知られている研究結果では、その重みはポテンシャルの減衰指数について不連続であり、連続にできるかどうかは未解決であった。冪乗型のクライン・ゴールドン方程式についても同じ状況で、解決すべき問題として残されていた。

本論文はハートリー型および冪乗型のクライン・ゴールドン方程式に対し、その不連続性を解消し重みの条件を弱めており、散乱作用素の定義域をある意味で拡張することに成功した。証明ではいくつかのストリックカーツ評価式を巧妙に組み合わせて使うことと適切な解空間の選択という工夫が見られる。それ以上に重要な点として関数空間の複素補間法という概念を用いている。これによって上記の不連続性を解消することができた。この手法は新しく独自のものであり、他の方程式の散乱理論においても新しい展開が期待できる。

著者は本論文の後半で逆散乱問題について考察している。散乱作用素からポテンシャルを決定する問題である。ハートリー型のシュレディンガー方程式および同じ型のクライン・ゴールドン方程式を扱っている。主として2つの新しい結果を示している。1つ目は、両方の方程式について散乱作用素が等しければ、ある条件の下ではポテンシャルも等しいということ、つまり一意性である。2つ目は散乱作用素からポテンシャルの無限遠方での減衰評価が決められるという結果である。ハートリー型のクライン・ゴールドン方程式についてはこれまで何も知られていなかった。冪乗型のシュレデ

ィンガー方程式およびクライン・ゴールドン方程式の逆散乱問題についての研究結果はあるが、そこで用いられた手法はハートリー型の方程式にそのままでは適用できない。著者はシュレディンガー方程式、クライン・ゴールドン方程式の両方に対してハートリー項に応用できる方法を開発した。それは入射波にパラメーターをもう1つ導入するという新たな方法であり、これによって極小振幅極限から決まる汎関数が定義できるようになった。ハートリー項をもつクライン・ゴールドン方程式の逆散乱問題では最初に示された研究結果である。シュレディンガー方程式についても非線型項の係数が変数の場合を扱っているという点で既に知られている研究結果の拡張になっている。これらの研究結果をきっかけに逆散乱問題研究の進展が今後期待できる。

これを要するに、著者は、散乱作用素の定義域およびポテンシャルの再構成について新知見を得たものであり、非線型偏微分方程式の散乱理論、逆散乱理論の発展に貢献するところ大なるものがある。よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。