

学位論文題名

Spectral Analysis of the Dirac-Maxwell System

(ディラック・マクスウェルシステムのスペクトル解析)

学位論文内容の要旨

本研究は相対論的量子電気力学の一つの単純化である Dirac-Maxwell システムについてのスペクトル解析を行ったものである。Dirac-Maxwell システムは相対論的な電子と量子電磁場との相互作用を記述するモデルであり、数理物理学的に最も重要なモデルの一つである。近年、Pauli-Fierz モデルをはじめとする非相対論的場の量子論のスペクトル解析は飛躍的に進歩した。しかしそこで主に扱われてきたモデルは、非相対論的な粒子と相対論的なボース場（たとえば電磁場）の結合した系であり、物理的に考えて満足のできるモデルではなかった。本研究で考察される Dirac-Maxwell システムは、その非相対論的極限がシュレーディンガー作用素と量子電磁場の相互作用を記述する Pauli-Fierz モデルに収束することが知られている。その意味において、Dirac-Maxwell システムは Pauli-Fierz モデルの一つの相対論的な一般化とみなされる。Dirac-Maxwell システムは Dirac 作用素で記述される電子と量子電磁場（光）が結合した系である。Dirac-Maxwell システムで記述される電子は有限伝播性を持つ。つまり、電子の波束の速さは光速を超えない。この事実は、Pauli-Fierz モデルのような非相対論的なモデルとの一つの違いである。非相対論的なモデルでは粒子はおもに Schrödinger 作用素によって記述されるので、電子の波束の速さは光速を超えてしまうが、Dirac-Maxwell システムではそのようなことは起こらない。本研究では主に、外力ポテンシャルはないものと仮定される。したがって外力が仮定されないため、系の全運動量は保存し、系のハミルトニアン H は全運動量の作用素のスペクトルで分解される。全運動量 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ を固定したハミルトニアンを $H(\mathbf{p})$ と書くことにする。物理的には、 $H(\mathbf{p})$ は電子と光の相互作用を全運動量 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ の系でみたときのハミルトニアンをあらわす。元の全系のハミルトニアンは $H(\mathbf{p})$ の直和であるから、各 $H(\mathbf{p})$ を解析すること H の性質も直ちに明らかとなる。このような理由から本研究では主に $H(\mathbf{p})$ が解析された。光と電子の相互作用系では電子の電荷 e が結合定数と見なされ、 e を含む項が摂動項と見なされる。この Dirac-Maxwell システムでは e を含む電子と光の電磁相互作用は、非摂動ハミルトニアンに対して相対有界にすらならない。この事実が Dirac-Maxwell システムのスペクトル解析を困難にしている。まず、本研究で $H(\mathbf{p})$ が下に有界な自己共役作用素であることが証明される。この結果の証明では、量子場の Coulomb ゲージ条件と Dirac 行列の反可換性が本質的に必要であった。この結果は $H(\mathbf{p})$ によって記述される系には最低エネルギーが存在することを意味する。この最低エネルギー $E(\mathbf{p}, M)$ と定義する。ここに $M \geq 0$ は電子の質量をあらわすパラメーターである。

$H(\mathbf{p})$ が固有値を持つとき、それに属する固有ベクトルは dressed electron state と呼ばれる。これは電子のまわりに光子の雲がまとわりついている定常状態である。現実の電子はすべてこの dressed electron state になっており、電子と電磁場の相互作用がゼロでない限り電子から光を切り離すことはできない。したがって、dressed electron state の存在証明は、数理物理学的に重要である。物理学では、Dirac-Maxwell システムで記述される正のエネルギーの電子は、光を放出して負のエネルギーに落ちると考えられている。したがって Dirac-Maxwell システムでは負エネルギーの dressed electron state が存在することが自然に予想される。本研究の主定理は $H(\mathbf{p})$ における dressed electron state の存在である。低エネルギー光子と電子の相互作用を少なくした条件（赤外正則化）をつけたとき不等式 $E(\mathbf{p}, M) < E(\mathbf{p}, 0)$ が成り立つならば

$E(\mathbf{p}, M)$ は $H(\mathbf{p})$ の固有値であることが本研究で明らかにされた。この dressed electron state の存在で特徴的なことは、本質的に全運動量 $\mathbf{p}$ と電子の質量 M に制限がつかないことである。これは非相対論的なモデルとは大きく異なる特徴である。非相対論的なモデルでは、dressed electron の存在には条件 $|\mathbf{p}|/M \leq c$ が必ず必要である。ここに c は光速である。なぜならば、非相対論的なモデルでは電子は光速を超えて運動することが可能であり、光速を超えた電子が電磁場の中を運動すると Cherenkov 放射（ある種の衝撃波）を放出してしまい、光が電子のまわりにまわりつくことができないからである。Dirac-Maxwell システムでは電子を相対論的に扱った効果がこの $\mathbf{p}, M$ に制限がつかないことに現れる。

以上をまとめると、本研究では電子と量子電磁場（光）を記述する系を運動量 $\mathbf{p}$ に固定した系が主に考察され、まずその系は最小エネルギーを持つことが証明された、次にその最小エネルギーは系のハミルトニアン固有値であることが証明された。このことは Dirac-Maxwell システムによって記述される系では負のエネルギーの dressed electron が存在すること意味する。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 新 井 朝 雄
副 査 教 授 岸 本 晶 孝
副 査 助 教 授 山ノ内 毅 彦

学 位 論 文 題 名

Spectral Analysis of the Dirac-Maxwell System

(ディラック・マクスウェルシステムのスペクトル解析)

近年、量子的粒子が量子場と相互作用を行う系の数学的に厳密な研究が盛んに行われている。しかし、その多くは量子的粒子が非相対論的な場合である（量子場は相対論的）。言うまでもなく、量子的粒子の方も相対論的に扱う方がより一般的である。だが、量子的粒子も相対論的な場合には、それが非相対論的な場合に比して、数学的な難しさが一段と増すために、この方面の研究はなお未開拓の分野となっており、今後の発展が待たれている状況にある。本論文は、このような現況を打開しようとする目的で行われた研究であり、1 個の相対論的電子が量子電磁場と相互作用を行う系—ディラック・マクスウェルシステム—のハミルトニアン H の数学的解析に関するものである。ここで扱われているモデルは、相対論的量子電磁力学のモデルのひとつであり、応用上も重要な意味をもつ。

本論文では、電子には外場が働かない状況が考察される。この場合には、系の全運動量は保存され、全運動量のスペクトルに関して、ハミルトニアンは直積分に分解される。本論文の主定理はこの直積分の各ファイバーをなす作用素 $H(p)$ —全運動量 p のディラックポラロンハミルトニアンとよばれる—のスペクトル解析に関わるものであり、次の結果が得られた：(1) $H(p)$ は下に有界である。したがって、 $H(p)$ のスペクトルの下限 $E(p)$ は有限である。(2) $E(p)$ は $H(p)$ の固有値である（これを $H(p)$ は基底状態をもつという）。(1) の証明は、全然自明ではなく、モデルの固有の特質をいかした一連の不等式を確立することによってなされた。(2) の証明は、さらに複雑で込み入ったものであり、重層的な近似議論と極限議論が必要とされる。いずれの方法も著者の独創になるものであり、非常に高く評価される。

これを要するに、著者は、相対論的量子電磁力学のひとつのモデルのスペクトル特性に関して、数学的定理として新知見を得たものであり、作用素論および量子場の数学的理論の発展に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。