

学位論文題名

On the geometric module associated to
finite complexes with a finite group action

(有限群が作用する有限複体からできる幾何学的加群について)

学位論文内容の要旨

1982年に R.Oliver-T.Petrie は、 G を有限群としたとき「有限 G -複体間の同変写像がいつ擬同値写像に拡張されるか」という問題を提唱し、それを解くために興味ある幾何学的加群を導入した。ここで擬同値写像とは基本群と整係数ホモロジー群上での同型を誘導する同変写像を指す。彼らが導入したいくつかの幾何学的加群の中で、私は $\Omega(G, \Pi)$ に注目した。これは集合としては Π -複体の(同型類)全体をある同値関係で割ったものであり、それには自然に加法が定義され、加群の構造が入る。ここで Π は G -作用を持った順序集合 (G -poset) である。我々はこの加群を G -poset Π に附随した Burnside 加群と呼ぶ。例えば、 G の部分群全部の集合 $S(G)$ に対して通常の包含で順序を入れ、 G 作用として共役作用を考えれば G -poset になる。さらに、 Y を基点を持つ有限 G -複体に対して、 $\Pi(Y) = \coprod_{H \in S(G)} \pi_0(Y^H)$ とおく。ここで、右辺は非交和であり、 Y^H は Y の H による不動点集合、 $\pi_0(Y^H)$ は Y^H の連結成分の集合とする。R.Oliver-T.Petrie によるテクニカルな定義に従えば、この集合も G -poset になる。 Y が 1 点から成る集合の場合には上述の $\Omega(G, \Pi)$ は自然に Burnside 環になるので、その意味において Burnside 加群とは Burnside 環の一般化概念であると捉えることができる。Burnside 環については有限群論においても非常に重要であり、その一般化の研究が T.Yoshida らによってなされている。私は G -poset の満たすべき性質(すなわち、上述の $\Pi(Y)$ が満たす性質)を公理化した上で Burnside 加群を定義し、T.Petrie らによって解明された Burnside 環の合同式の Burnside 加群版を構成した。次に「Burnside 加群はどのような群に対して定義可能か?」という問題意識に立ってその普遍化版を考えた。私の提唱した普遍 Burnside 加群はどのような群に対しても定義可能であり、もちろん有限群の場合には通常の Burnside 加群と同型になる。私は特に G がコンパクトリー群の場合には有限生成自由アーベル群になることを証明した。さらに Laitinen や Lück らが Lefschetz 環を Burnside 環に対して構成したことを参考にして、Lefschetz 加群というものを考えた。そして Burnside 加群と Lefschetz 加群の間には自然な同型写像が作れることを証明した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 吉 田 知 行

副 査 教 授 泉 屋 周 一

副 査 助 教 授 秋 田 利 之

学 位 論 文 題 名

On the geometric module associated to finite complexes with a finite group action

(有限群が作用する有限複体からできる幾何学的加群について)

まず、本学位論文で扱う Burnside 加群について、研究の背景と藤田氏の得た成果を述べ、その後本論文の評価と審査結果を述べる。

有限群の Burnside 環とは、その群が作用する有限集合の Grothendieck 環である。群が自明な場合は、整数環の構成に相当する。1970 年代以降、基本定理、ベキ等元公式、部分群複体の幾何との関係、有限群の表現論や合同式への応用が見いだされた。

一方位相変換群論や同変位相幾何学の分野でも、tom Dieck が定義したコンパクトリー群の Burnside 環が、盛んに研究された (1980 頃)。有限複体からできる Burnside 加群の概念も、当時 Oliver が同変位相幾何学への応用 (同変写像の擬同値写像への拡張可能性) を目指して導入したものである。研究は 1990 年頃には下火になったが、代数分野での Burnside 環の研究の成功を受け、位相幾何の方でも研究が再び活発化している。

本論文もこのような Burnside 環研究の最近の流れに乗っている自然なもので、両分野で発展してきた Burnside 環の研究の代数的位相幾何学からの統合という大きなテーマの一環である。有限複体からできる Burnside 加群について、本論文で次の成果をあげた。第 1 章。Burnside 加群の定義を改良し、いくつかの群論的公式 (実質基本定理) の Burnside 加群版を得た。

第 2 章。普遍 Burnside 加群を定義し、その基本的な性質を示した。とくに有限群の場合には通常の Burnside 加群になること、またコンパクトリー群の場合には有限生成自由アーベル群になることを示した。

第 3 章。Lefschetz 加群を定義し、Burnside 加群との間の自然な同形写像を構成した。Burnside 加群の定義は複雑だが、この同型は Burnside 加群の概念の自然さを示している。

これらの成果は、代数学と幾何学双方に関する深い知識が必要であり、研究成果の重要性とともに両分野への影響も大きい。とくに Burnside 加群は、一般 Burnside 環の大幅な拡張であり、有限群論への応用も期待できる。

これを要するに、著者は、Burnside 加群について多くの新知見を得たものであり、代数学と幾何学双方に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める。