

学 位 論 文 題 名

Singular fibers of two colored differentiable maps
and cobordism invariants

(2 色付けられた可微分写像の特異ファイバーとコボルディズム不変量)

学位論文内容の要旨

Thom による多様体の埋め込み写像のコボルディズムの理論の創設以来, 様々な数学者によって写像のコボルディズムに関する理論が展開されている. 写像のコボルディズムは, 値域多様体を可縮な多様体にする定義域多様体のコボルディズム群を誘導する. この性質により, 写像のコボルディズムを研究することは多様体の位相的な情報をその多様体上の写像を通して調べるための一つの研究手法となる.

近年, 佐伯修氏によって展開された「可微分写像の特異ファイバーの理論」では, 可微分写像の特異ファイバーの隣接関係により定義されたコチェイン複体のコホモロジー類は可微分写像のコボルディズム不変量を定義することが示されている. 実際に, 佐伯氏は向き付け可能な閉 4 次元多様体から 3 次元多様体への安定写像に対して, その写像にあらわれる「三つ輪型ファイバー」の数と 4 次元多様体のオイラー数は偶奇が一致すると言うことを示している.

本論文で“向き付け不可能”まで許した場合に, 佐伯氏の公式と同種の公式が得られることがわかった (Theorem 4. 7 in Chapter 1). このとき, 3 次元多様体への安定写像は, どれでも良いわけではなく“2 色付け可能”と言う大域的な条件を満たさなくてはならない (この条件は 3 次元多様体を $\mathbb{R}^3$ とすれば, どんな安定写像も満たすことがわかる). ここで, 多様体間の可微分写像 $f: M \rightarrow N$ が“2 色付け可能”な写像であるとは, $N \setminus f(S(f))$ の disjoint な開集合 R, B で

$$\overline{R} \cap \overline{B} = \partial R = \partial B = f(S(f))$$

を満たすものがあるときに言い, 対 $(f, (R, B))$ を“2 色付けられた”写像と呼ぶ. このとき, 2 色付けられた写像にあらわれるファイバーの間に色付けも込めた同値関係を入れると, そのファイバーの同値類のなす $\mathbb{Z}_2$ 係数コチェイン複体を定義することが出来る. さらに, 色付けられた写像の間にコボルディズムを定義すると, 先のコチェイン複体のコホモロジー群の生成元は, コボルディズム不変量を定義することがわかった. 実際のコホモロジー群の計算から, 先に述べた向き付け可能も含めた閉 4 次元多様体のオイラー数公式 (Theorem 5.8 in Chapter 2) や, Szűcs によって得られていた閉 2 次元多様体から連結な 3 次元多様体への安定写像による閉 2 次元多様体のオイラー数公式の別証明が得られる (Theorem 5.15 in Chapter 2). さらに, 2 色付け可能のような大域的な仮定なしに, 閉 4 次元多様体の特異ファイバーによる mod 2 オイラー数公式は存在しないこともわかった (Theorem 5.24 in Chapter 2).

次に, 佐伯氏との共同研究による向き付けられた閉 4 多様体の符号数公式, そしてその一般化である, 多様体の第 1 ポントリャーギン類の公式について紹介する. まず, 向き付けられた閉 4 次元多様体から 3 次元多様体への安定写像を考えると, 閉 4 次元多様体の向きを

用いて、その写像にあらわれる「三つ輪型ファイバー」に $+1, -1$ の符号を定義することが出来ることがわかった。さらに、その符号和が閉 4 次元多様体の“符号数”と一致することがわかった (Theorem 5.5 in Chapter 3). ここで、閉 4 次元多様体の符号数とそのオイラー数の偶奇は一致することがわかってるので、この符号数公式から向き付け可能な閉 4 次元多様体のオイラー数公式が導かれる。次に、いまの場合は 4 次元と 3 次元の間の安定写像だったが、次元差を保ったまま一般の次元への一般化を考える。具体的に述べると以下のようなになる。ここで考える写像 $f: M \rightarrow N$ は、 n 次元多様体から $n-1$ 次元多様体への Thom-Boardman ジェネリックなものでありさらに、Atiyah により導入された“向き付けられた写像”になっているものとする。このとき、値域多様体の点でそれ上のファイバーが、「三つ輪型ファイバー」であるような点を全て集めた集合の表わすホモロジー類は、定義域多様体の第 1 ポントリャーギン類の f の誘導する Gysin 写像による像と“振れを法”として一致することがわかった (Theorem 2.5 in Chapter 4).

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 石 川 剛 郎

副 査 教 授 泉 屋 周 一

副 査 教 授 佐 伯 修

(九州大学大学院数理学研究院)

副 査 助 教 授 大 本 亨

学 位 論 文 題 名

Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants

(2色付けられた可微分写像の特異ファイバーとコボルディズム不変量)

本論文は、可微分写像のトポロジーに関するものである。特に微分トポロジーの分野で重要な、4次元多様体から3次元多様体への安定写像に関する新しい結果を与えている。従来、定義域多様体が向き付け可能な場合は、可微分写像のトポロジーが、特異ファイバーという値域に関して局所的な情報によって記述できることが知られていた。この論文において、著者は、定義多様体が向き付け可能でない場合に研究対象を広げ、その場合の特異ファイバーの完全な分類を与えると共に、独自の「2色塗り分けの手法」を用いて、値域多様体に関して大域的なデータを加味することにより、特異ファイバーの有り様と、定義多様体のオイラー標数などの写像のコボルディズム不変量の関係を明確に与えた。さらに、特異ファイバーや色づけの情報を使って、個々の安定写像を超えて、安定写像の持つ特異性全体を対象として、いわゆる「普遍複体」を導入し、そのコホモロジーの精密な計算を遂行し、オイラー標数公式の幾何学的に深い理解に到達している。さらに、4次元多様体の符号数理論への応用について最新の結果を導いている。著者は、彼の独創性・発展性のある研究結果について十分な説明を与え、新しいアイデアを縦横に展開している。また一方では、膨大な計算結果によって得られた結果を手際良くまとめ、研究の背景や今後の研究の展望も明示している。

このように、著者は、可微分写像のトポロジーに関する新しい知見を得たものであり、現代幾何学、とくに微分トポロジーの分野の発展に大きく寄与するものである。

よって、著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。