

学 位 論 文 題 名

Reconstruction of Inclusions for the Inverse Boundary Value Problem of Heat Equation Using Probe Method

(熱伝導方程式の境界値逆問題に対する探針法を用いた介在物の再構成)

学位論文内容の要旨

本研究は、熱伝導方程式に対する探針法について考察した。探針法とは定常熱伝導体に対して池島 ([6]) により導入された方法で、ディリクレ・ノイマン写像と呼ばれる境界での観測から内部の介在物を同定する方法である。

第 2 章で、定常熱伝導方程式の混合型境界値逆問題に対する探針法の理論を考察した。本研究では探針法を発展させ、非等定常熱体について、しかも外部熱もつけた場合を考察した。ただし未知介在物 D の熱伝導係数 $\gamma_0 + \gamma_1$ と、介在物の外側 $\Omega \setminus \bar{D}$ の熱伝導係数 γ_0 について、 γ_1 は D の閉包 $\bar{D}$ で殆ど至るところ正定値か、もしくは負定値であると仮定する。 γ_0 が γ_1 のスカラー倍である場合についての探針法は [2] で研究した。

なお探針法とよく似た方法として R. Potthast と彼の共同研究者によって導入された singular sources method と呼ばれる方法がある事をあげておく ([8])。最近では K. Erhard と R. Potthast ([4]) は、ヘルムホルツ方程式に対する、障害物同定境界値逆問題についての探針法の数値実験を行った。

探針法と singular sources method のルーツは、V. Isakov ([7]) の導体内部の未知介在物同定の一意性の研究が元となっている。ただし γ_0 と γ_1 は等方的である事を仮定している。

次に、本研究の新しい点について 2 点あげる。

(i) 熱伝導係数 γ_0, γ_1 の滑らかさの仮定が最小限である事。すなわち仮定 $\gamma_1 \in L^\infty(\Omega), \gamma_0 \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ は最も弱い条件であると思われる。それは探針法の議論で最も重要な $\Omega \setminus \bar{D}$ に対する一意接続定理が使える最小限の仮定が $n = 3$ のとき $\gamma_0 \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $n = 2$ のとき $\gamma_0 \in L^\infty(\Omega)$ であるからである。

(ii) 混合型境界条件や、非斉次項の存在の下では同定のための数学的検査器である indicator function の挙動解析に順問題の Green 関数が L^2 有界である事を示す必要がある。Green 関数の L^2 有界性については $n \geq 3$ の場合 M. Grüter と K-O. Widman が示している ([5]) が、 $n = 2$ の場合は未証明だった。本研究では $n = 2$ についてもその証明を与えた。

第 3 章では非定常熱伝導方程式に対する探針法について考察した。これに関連する結果としては、H. Bellout ([1]) が未知介在物が時間依存しないときの局所一意性と安定性について示している。そして Elayyan と Isakov が局所化されたディリクレ・ノイマン写像についての一意性を示している ([3])。

しかし未知介在物の再構成についての結果はこれまで皆無であった。本研究では空間 1 次元非定常熱伝導方程式について探針法の理論を確立し、未知介在物の再構成を行った。この結果は、非定常熱伝導方程式に対して、未知介在物を再構成した初めてのものと思われる。

定常熱伝導方程式の議論同様、indicator function を定義する。しかし熱作用素は coercivity がないので indicator function を直接評価できない。しかし indicator function の反射解 $w(x, t)$ を用いた表現式を得る事ができる。ここで反射解とは Green 関数と熱方程式の基本解との差である。そこで反射解の挙動を注意深く解析して indicator function の挙動を解析した。

反射解 $w(x, t)$ の挙動解析のより詳しい内容は次のとおりである。

(1) 介在物 D が時間依存しない場合について反射解を時間に関してラプラス変換し、常微分方程式に対する transmission boundary value problem を解く事によって得た。さらに反射解を主要部分と剰余部分に分けることに成功した。

(2) 介在物 D が時間に依存する場合は、非定常熱伝導方程式の係数を時間 τ で freeze した時の反射解 $w^\tau(x, t)$ を考え、差 $w(x, t) - w^\tau(x, t)$ の $H^{1,0}$ 有界性を示した。 $(H^{1,0})$ については第3節1章参照) そして $w(x, t)$ の主要部が、 $w^\tau(x, t)$ の主要部から得られる事を示した。

そして最後に第4章で非定常熱伝導方程式の介在物が時間依存しない場合についての数値実験について触れている。探針法の数値的に実現で鍵となるのは、single layer potential を用いた Runge の近似定理の数値の実現である。その Runge の近似の数値計算スキームについて述べ、探針法の数値計算スキームについて述べた。

参考文献

- [1] H. Bellout, Stability result for the inverse transmissivity problem, J. Math. Anal. Appl. No.168 13-27 (1992).
- [2] Y. Daido, M. Ikehata and G. Nakamura, Reconstruction of inclusion for the inverse boundary value problem with mixed type boundary condition, Appl. Anal. 83 no.2 (2004), 109-124.
- [3] A. Elayyan and V. Isakov, On uniqueness of recovery of the discontinuous conductivity coefficient of a parabolic equation, SIAM. J. Math. Anal. 28 no.1 (1997), 49-59.
- [4] K. Erhard and R. Potthast, A numerical study of the probe method (preprint).
- [5] M. Grüter and K-O. Widman, The Green function for uniformly elliptic equations, manuscripta math. 37 (1982), 303-342.
- [6] M. Ikehata, Size estimation of inclusion, J. Inverse and Ill-Posed Problems 6 (1998), 127-140.
- [7] V. Isakov, On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 865-877.
- [8] R. Potthast, Point sources and multipoles in inverse scattering theory, CHAPMAN & HALL/CRC London (2001).

学位論文審査の要旨

主査	教授	中村	玄
副査	教授	神保	秀一
副査	教授	小澤	徹
副査	助教授	利根川	吉廣

学位論文題名

Reconstruction of Inclusions for the Inverse Boundary Value Problem of Heat Equation Using Probe Method

(熱伝導方程式の境界値逆問題に対する探針法を用いた介在物の再構成)

著者は、定常および非定常熱伝導方程式に対する未知介在物同定の再構成公式について研究した。

定常の場合は、所謂 probe method と呼ばれる再構成公式を、混合型境界条件と熱源を持つ非等方熱伝導体に対して、係数の滑らかさが可能な限り弱い仮定のもとで示した。再構成公式は、与えられた観測データから定義される数学的検査器である indicator function の挙動を調べることにより与えられる。その挙動解析では、所謂反射解の挙動の解析が鍵となる。著者は、不連続係数の発散型楕円作用素の基本解を使ってその挙動を解析した。この基本解は、3次元のときは既に知られていたもので間に合ったが、2次元の時は新たに構成し、その性質を調べる必要があった。

非定常の場合は、空間1次元の場合について未知介在物同定の再構成公式を与えた。ここで、未知介在物はある種の幾何学的仮定を満たせば、未知介在物は時間に依存しても構わない。これまでは、介在物が時間に依存しない場合でさえ既存の再構成公式は皆無であった。再構成公式は、定常の場合の probe method と singular sources method を融合した様な新しい型の indicator function を定義して、その挙動を調べることで再構成公式を導いた。定常の場合のように indicator function の挙動解析には、反射解の解析が鍵となる。この反射解の解析以外は、空間1次元に限らず一般の場合にも通用する形で議論されている。しかし空間2次元以上の時は、反射解の挙動解析は容易ではない為に、空間1次元に限定している。また、ここで得られた再構成公式について数値計算の枠組みも与えているが、数値実験結果は与えられていない。

定常、非定常何れの場合も、未知介在物同定の再構成式公式の研究に明白な貢献をしたといえる。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認める。