

学 位 論 文 題 名

On the holonomic ranks and the algebraic local cohomology modules of A -hypergeometric system in special cases

(特別な場合での A - 超幾何系のホロノミック次元と
代数的局所コホモロジーについて)

学位論文内容の要旨

本研究対象は, GKZ -超幾何系と呼ばれる一般化された超幾何関数に解を持つような線形偏微分方程式系に対応するワイル代数 (微分作用素環) D 上の加群 $M_A(\beta)$ の D -不変量である. ここで $M_A(\beta)$ とは, 整数係数の $d \times n$ 行列 A と d 次元複素パラメータ β の 2 つのデータから決まる D -加群である. 本研究では, 組み合わせ論的に定義された有限集合を導入した上で, “代数的局所コホモロジー群” と “一般点の周りでの解空間の次元 (ホロノミック次元)” という重要な D -不変量の構造を, それぞれ行列 A が特別な場合において記述した. これらの研究成果の詳細を述べる前に, これらの研究の背景から述べることにする.

W. Miller 氏の “Lie theory and generalization of hypergeometric functions” (SIAM J. Appl. Math. 25 (1973)), Hrabowski 氏の “Multiple hypergeometric functions and simple Lie algebras SL and Sp ” (SIAM J. Math. Anal. 16 (1985)) の論文によって, ガウスの超幾何微分方程式の一般化の位置づけとして, A -超幾何系の原点とも言うべき線形偏微分方程式系が導入された. その後, Gel'fand, Graev, Kapranov 氏達の “Holonomic systems of equations and series of hypergeometric type” (Dokl. Akad. Nauk SSSR 295 (1987)), Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky 氏達の “Hypergeometric functions and toric varieties” (Funktsional. Anal. i Prilozhen 23 (1989)) において, 現在定義されている A -超幾何系 $M_A(\beta)$ が導入された. そして後者の論文を機に, A -超幾何系とトーリック多様体との関連性に着目した体系的な研究が始まった (このような経緯から, A -超幾何系と呼ぶ代わりに, この三者の頭文字をとって GKZ -超幾何系と呼ぶことも多い). 特にこの論文では, $M_A(\beta)$ の特性多様体の既約分解と, 行列 A から決まるアフィントーリック多様体の (行列 A を通した代数的トーラスの作用による) 軌道分解との間に, 一対一の対応があることが見出され, さらに行列 A から決まる半群環 $\mathbb{C}[NA]$ が Cohen-Macaulay 環という特別な場合においては, 特性多様体の各既約成分の重複度の計算もなされた. 特に, 一般点を含む既約成分の重複度 (即ち, ホロノミック次元) に関して, 以下の定理が証明された. 「行列 A を構成する列ベクトルのなす $\mathbb{Z}^d$ の部分集合を再び A で表すことにする. もし A が原点を含まない一つの超平面に含まれ (この条件を “斉次” と呼ぶことにする), かつ A から決まる半群環 $\mathbb{C}[NA]$ が Cohen-Macaulay 環であるとするならば, $M_A(\beta)$ のホロノミック次元はパラメータ β に依存せず常に一定であり, それは A と原点とで張られる凸包の正規化された体積 ($\text{vol}(A)$ と書く) に等しい.」以後, 様々な研究者達によって, $M_A(\beta)$ の D -不変量の研究, 特に, Sturmfels 氏によって立てられた, ホロノミック次元に関する上記の定理の逆命題, つまり, 「任意のパラメータ β に対して $M_A(\beta)$ のホロノミック次元が常に $\text{vol}(A)$ と等しいのであれば, 半群環 $\mathbb{C}[NA]$ は Cohen-Macaulay 環であろう.」という予想を解決する

研究がここ数年の間に盛んに行われた。この問題に関しては、Matusevich, E. Miller, Walther 三氏の共著論文 “Homological methods for hypergeometric families” (J. Amer. Math. Soc. 18 (2005)) において、ようやく肯定的に解決された。

これ以外の重要な問題もまだまだ多くある。本研究において着眼した問題は以下の 2 つである。

(一つ目の問題) $C[NA]$ が Cohen-Macaulay 環とは限らぬ場合のホロノミック次元の明示的な記述 (次元公式) を与えよという問題。

(二つ目の問題) 各々の軌道に関する $M_A(\beta)$ (厳密には $M_A(\beta)$ の形式フーリエ変換) の代数的局所コホモロジー群の構造を明示的に記述せよという問題。この問題は、先ほど述べた「 $M_A(\beta)$ の特性多様体の既約分解と、行列 A から決まるアフィントーリック多様体の (行列 A を通した代数的トーラスの作用による) 軌道分解との間に、一対一の対応がある」という事実に基づく自然な問題である。

これらの問題は重要性があるにもかかわらず、当初からそれほど研究が進んでいない。本研究は以上の問題の解決に向けての研究となっており、これらに対する部分的結果をまとめたものとなっている。以下にその内容を述べよう。

(ホロノミック次元の明示的な記述について) 本研究に着手した時点では、既存にあった明示的な記述 (次元公式) は、齋藤, Sturmfels, 高山氏達の共著書籍 “Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations” (Springer 1999) にある、行列 A の階数が 2 である時と齋藤氏の論文 “Logarithm-free A -hypergeometric series” (Duke Math. J. 115 (2002), no.1, 53–73) にある、 A の張る凸包が原点を含まない $d-1$ 次元 simplex (A は斉次になる) となる時にしか与えられていなかった。そこで本研究では、より一般的な場合を考える際に以下の方法を取った。まず始めに、与えられた半群環 $C[NA]$ とその正規化した環 $C[\overline{NA}]$ との “差” とパラメータ β との関係を厳密に論じる必要があると考え、この差が上手く反映されるように、“Hypergeometric functions and toric varieties” で導入された非可換な “Koszul 複体” を一般化した。実は、“Homological methods for hypergeometric families” に出てくる Euler-Koszul 複体とほぼ同じ概念であるが、本研究ではこの複体をさらに一般化し、 A -hypergeometric D -complex と名づけた。次に、この複体から構成される D -加群の導来圏の中での三角形 (distinguished triangle) の構造に着目し、この複体の構造を決定する組み合わせ論的見地から定義された有限集合を新たに導入した。その有限集合は比較的調べやすい対象となっており、他の D -不変量の計算にも役立つ期待は大いにあると言える。実際のところ、次に述べる代数的局所コホモロジー群の記述に関しても有用であることが分かった。この有限集合の構造を通じて、ホロノミック次元を解析したところ、第一の結果として、その集合が比較的単純な構造をもつ場合において、ホロノミック次元の明示的な記述を与えることができた (ここでは行列 A の階数に特に制限はない)。また第二の結果として、行列 A の階数が 3 の時のホロノミック次元の明示的な記述をパラメータごとに完全に与えることができた。これらの結果をここで具体的に述べるには紙面を要するので、詳細は “ A -hypergeometric ranks for toric threefolds” (International Mathematics Research Notices に投稿中)、本学位論文では第 3,4 節を参照されたい。

(代数的局所コホモロジー群の記述について) 比較的性質の良いとされる、半群環 $C[NA]$ が Cohen-Macaulay 環の時の記述に取り組んだ。方法としては、まず最初に、 $C[NA]$ が正規の時、 A -hypergeometric D -complex はパラメータ β に依らず非輪状であるという事実が、Cohen-Macaulay というより緩い条件下でも成り立つことに着眼した。そして、この複体と局所コホモロジー群を与える複体 (チェック複体) から作られる二重複体の計算を行い、先ほど「ホロノミック次元」のところでも述べた有限集合も用いた結果、局所コホモロジー群がある 2 種類の D -加群の外部テンソル積たちによって直和分解されることが分かった。特に局所コホモロジーが消滅するパラメータ β についての条件も確定することができた。この直和分解の記述も紙面を要するので、詳細は “Local cohomology modules of A -hypergeometric system of Cohen-Macaulay

type” (Tohoku Mathematical Journal に掲載予定), 本学位論文では第 5,6 節を参照されたい.
以上が本研究で得られた結果である.

学位論文審査の要旨

主査	助教授	齋藤	陸
副査	教授	中村	郁
副査	教授	山下	博
副査	助教授	本多	尚文

学位論文題名

On the holonomic ranks and the algebraic local cohomology modules of A -hypergeometric system in special cases

(特別な場合での A - 超幾何系のホロノミック次元と
代数的局所コホモロジーについて)

A -超幾何系とは、1970 年代にミラーにより定義され、1980 年代後半にゲルファント等により組織的研究が始められた偏微分方程式系であり、通常の超幾何微分方程式系にパラメータに対応する新しい変数を導入し、対称性を高めたもので、トーリック多様体と強い関連があることから様々な分野の研究者から興味を持たれている対象である。

本論文では、 A -超幾何系における二つの重要な問題についてホモロジー代数的考察を行った。一つ目の問題はホロノミック次元（解空間の次元）の公式についてであり、二つ目の問題は A -超幾何系のフーリエ変換の代数的局所コホモロジーについてである。

この二つの問題の解決のため、本論文で著者は A -超幾何系より一般的な概念「商 A -超幾何 D -複体」を定義し（独立に、マツセヴィッチ・ミラー・ウオルターもこれと同様な概念を導入した）、さらにそれに付随する幾つかの組合せ的概念を導入し、詳細な考察を与えた。また、導来圏における商 A -超幾何 D -複体の直和分解をこれらの組合せ的概念を用いて示した。この分解定理により様々な問題が直既約なものに対して考えれば良いことになり、従って、この定理は今後の A -超幾何系の研究に大いに寄与することが期待される素晴らしい結果である。

さて、一つ目の問題についての既知の結果は、「 A 」に付随する半群環がコーエン・マッコウレイの場合に任意のパラメータについてホロノミック次元が「 A 」（と原点と）の凸閉包の体積と等しくなることや、行列 A の階数が 2 以下の場合や、「 A 」が斉次で、その凸閉包が単体的であるときの次元公式が知られていたことなどだった。

著者は行列 A の階数が 3 で、直既約の場合に次元公式を与えた。従って、上記の分解定理と合わせて行列 A の階数が 3 の場合には完全に次元公式が得られたことになった。さら

に著者は行列 A の階数は一般でパラメータが単純と呼ばれる場合にも次元公式を与えた。証明は、前記の組合せ的概念を用いて商 A -超幾何 D -複体を分解していき、それら分解された複体の部分オイラー指標を計算することによりなされる。

二つ目の問題は A -超幾何系のフーリエ変換の代数的局所コホモロジーについてである。 A -超幾何系のフーリエ変換は、アフィントーリック多様体を台として持つ。従って、アフィントーリック多様体の各軌道に関する代数的局所コホモロジーを考察することは大変重要なことである。にも拘らず、これについて先行する研究はなく、その研究が待たれていた。著者は、「 A 」に付随する半群環がコーエン・マッコウレイの場合に全てのパラメータに対して、 A -超幾何系のフーリエ変換の代数的局所コホモロジーの詳細な記述を与えた。これはまず、チェック複体と商 A -超幾何 D -複体とによる二重複体を考え、著者により導入された前記の組合せ的概念を用いてこの二重複体のコホモロジーを計算し、 A -超幾何系のフーリエ変換の代数的局所コホモロジーを詳述した。さらに、著者はこの代数的コホモロジーの記述から、「 A 」が斉次のとき、 A -超幾何系のフーリエ変換の解層を計算した。

著者は、本論文において、その豊富な可換環論、代数解析学、ホモロジー代数の知識を駆使し、上記の問題を解決した。著者によるこれらの成果及びこれらの成果を導くために新たに導入した概念は、 A -超幾何系及び関連する理論において大変重要なものである。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。