

学 位 論 文 題 名

Dynamics of traveling pulses
in heterogeneous media of jump type

(ジャンプ型空間非一様性媒質における進行パルスダイナミックス)

学位論文内容の要旨

自然界のパターンは実験室の中の化学反応系から宇宙の大規模構造に至まで様々な規模で形成されている。そのため、物理学、化学、生物学、工学など至る所でパターン形成に関する研究が進められている。パターン形成の一般的な仕組みを解明することは重要であり、さらにそれを応用することが求められている。自然界のパターン形成の記述には反応拡散方程式がしばしば用いられる。様々なモデル方程式が提案されており、そうした方程式の時空間パターンの解析が数多くなされている。一次元パルスの挙動や二次元スポットの振る舞いなどが数学を用いた解析によって明らかにされつつある。

これまでの研究では、モデル方程式の拡散係数や力学パラメータが空間一様である、すなわち空間一様性媒質の研究が大部分であった。しかし、現実の現象においては拡散係数や力学パラメータが空間非一様になっていることが想像される。そこで本研究では、空間非一様性媒質が時空間パターン形成にどのような影響を与えるかに注目した。反応拡散系に現れる一次元進行パルスが空間非一様な媒質上でどのように振る舞うかを考察した。

本研究で扱う反応拡散系モデルは、一次元パルスの性質が比較的良好に知られている空間一次元の Gray-Scott モデルを用いた。同モデルでは安定な進行パルス、安定な定常パルス、分裂するパルスが存在することが知られている。空間非一様媒質として、最も単純な場合であるジャンプ型とバンプ型を採用した。ジャンプ型は、方程式の力学パラメータの値がある一点で急激に変化しているものであり、バンプ型は力学パラメータの値が2点で急激に変化しているものである。空間非一様性媒質は進行パルスの伝搬スピードに影響を与える。

上記の設定のもと安定な進行パルスが存在するパラメータ領域において数値実験を行ない、ジャンプの高さを変化させることによりパルスは3つのクラスに分かれることを明らかにした。ジャンプの高さが低いときは、進行パルスはジャンプを乗り越えて進行する (Penetration) ことができる。ジャンプの高さが高くなると、進行パルスは分裂する (Splitting)。さらにジャンプの高さが高くなると、進行パルスはギャップに対して反射す

る (Rebound). 反対にジャンプの高さを低くすると, Penetration のみ観察することができる. ジャンプの高さを低くしすぎると進行パルス領域から分裂パルス領域になってしまうため注意が必要である.

数値実験によって観察されたダイナミックスが各種パラメータの変化とどのように対応しているかを, Saddle-node 分岐と pitchfork 分岐が同時に起きる複合分岐点近傍の解析を行なった. モデル方程式は偏微分方程式で表現されているため, 解の性質を直接調べることが困難である. そこで, 複合分岐点近傍において, 定常パルス解, pitchfork 分岐に関連した固有関数, Saddle-node 分岐に関連した固有関数を用いて, 進行パルス解を近似することにより, もとの偏微分方程式を有限次元力学系へ縮約した. この縮約から導出された常微分方程式は, 空間非一様性媒質に関して一般形で表現されているため, 様々な空間非一様性媒質に適用可能なものとなっている.

最後に, 本研究では力学パラメータの値が空間非一様性を持った Gray-Scott モデルを用いて, 1次元パルスの振る舞いがどのようになるかを数値計算により明らかにし, そのダイナミックスを有限次元力学系に縮約し解析を行なった. 以上のことから, このダイナミックスを明らかにした.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 西 浦 廉 政
副 査 教 授 津 田 一 郎
副 査 教 授 中 村 玄
副 査 教 授 神 保 秀 一

学 位 論 文 題 名

Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media of jump type

(ジャンプ型空間非一様性媒質における進行パルスダイナミックス)

自然界のパターンは実験室の中の化学反応系から宇宙の大規模構造に至まで様々な規模で形成されている。そのため、物理学、化学、生物学、工学など至る所でパターン形成に関する研究が進められている。パターン形成の一般的な仕組みを解明することは重要であり、さらにそれを応用することが求められている。自然界のパターン形成の記述には反応拡散方程式がしばしば用いられる。それらの有する時空間パターンの解析が数多くなされている。これまでの研究では、モデル方程式の拡散係数やキネティックパラメータが空間一様である、すなわち空間一様性媒質における研究が大部分であった。しかし、現実の現象においてはそれらが空間非一様になっていることが普通であり、それが実際にパターンダイナミックスにどのような影響を与えるかについてはまだまだ未開拓であった。そこで本研究では、空間非一様性媒質が時空間パターンダイナミックス、とりわけ空間局在パターン、例えばパルスの運動にどのような影響を与えるかに注目し、さらにこれを有限次元ダイナミックスに帰着することにより、方程式の種類によらない普遍的性質を取り出すことを主目的としたものである。

本論文で扱う反応拡散系モデルは、一次元パルスの性質が比較的良好に知られている空間一次元の Gray-Scott モデルを用いている。同モデルでは安定な進行パルス、安定な定常パルス、分裂するパルスが存在することが知られている。空間非一様媒質としては、最も単純な場合であるジャンプ型とバンプ型を採用している。ジャンプ型は、方程式のあるパラメータの値が Heaviside 関数のように、ある一点で急激に変化しているものであり、バンプ型はパラメータの値がある有限区間で異なる値をとる場合を想定している。空間非一様性媒質は進行パルスの伝搬スピードに大きく影響を与えることが知られている。

上記の設定のもと安定な進行パルスが存在するパラメータ領域において数値実験を行ない、ジャンプの高さを変化させることによりパルスの振る舞いは3つのクラスに分かれることを明らかにした。ジャンプの高さが低いときは、進行パルスはジャンプを乗り越えて進行する (Penetration) ことができる。ジャンプの高さが高くなると、進行パルスは分裂する (Splitting)。さらにジャンプの高さが高くなると、進行パルスはギャップに対して反射する (Rebound)。これら数値実験によって観察されたダイナミックスが各種パラメータの変化とどのように対応しているかを理論的に考察するためにパルスが Saddle-node 分岐と pitchfork 分岐が同時に起きる複合分岐点近傍にあるとして、それがジャンプ型の非一様性に会ったときの振る舞いをパルス相互作用の理論を用いて解析を行なっている。モデル方程式は偏微分方程式で表現されているため、解の性質を直接調べるのが困難であるため、なんらか

の縮約技法は不可欠となる。ここでは複合分岐点近傍において、定常パルス解、pitchfork 分岐に関連した固有関数、Saddle-node 分岐に関連した固有関数を用いて、進行パルス解を近似することにより、もとの偏微分方程式を有限次元不変多様体の運動に帰着することが可能となり、その上の流れとして有限次元力学系を具体的に得ることが可能となっている。この縮約から導出された常微分方程式は、空間非一様性媒質に関して一般形で表現されているため、周期型、ランダム型をはじめ様々な空間非一様性媒質に適用可能なものとなっている。

以上より、著者はパルスの非一様媒質における運動について、特異点近くにおいてパルスダイナミクスの手法により有限次元ダイナミクスに帰着することに成功した。さらにその帰着された有限次元ダイナミクスは方程式の種類によらない普遍的構造を有していること、すなわち通過、分裂、反射の振る舞いを引き起こす隠れた数学的機構を明らかにした点において、非一様な媒質におけるパターンダイナミクスの進展に寄与するところ大なるものがある。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。