

博士（文学）齊藤 健

学位論文題名

圈論における構造

- 数学の哲学における新たな構造主義の可能性 -

学位論文内容の要旨

本論文では、数学の哲学における構造主義に関する研究を通して、数学に現れる構造はどのような在り方をしているのか、という問題を解明し、様々な種類の構造主義について論究する。第Ⅰ部では、従来の代表的な構造主義を提示し、その問題点を明らかにする。それらの構造主義は圈論における構造を十分に扱うことができない。そこで第Ⅱ部では、圈論における構造を的確に扱うことのできる構造主義を探り、3つのアプローチについて論じる。そのうち、拡張されたスキーマによるインレ構造主義が、より広い範囲で適用可能であることを論じる。

第Ⅰ部

1. 1章 2章 3章

数学の哲学における構造主義は、数学で重要なものは個別の数学的対象というよりもむしろそれらを関係づける構造だという立場である。この点でフレーゲの対象観とも異なるし、従来の実在論者とも異なる存在観をもつ(第1章)。レスニクはクワインの実在論と全体論を継承する構造主義者である。彼はパタンによって哲学的解明を目指し、構造がその具体例の中に存するというインレ構造主義をとる。彼の実在論は個体としての数学的対象に関する実在論であって構造実在論ではない。彼の立場では圈論における構造が解明されえないことを示した(第2章)。シャピロは構造実在論としてのアンテレム構造主義を提示したが、彼の基本用語「構造」「体系」「例化」「位置」は多義的過ぎて実際の数学的構造に適用できない。さらに彼のアンテレム構造主義と集合論による存在観は相容れないという問題点も明らかにした(第3章)。このように、集合論に基づく従来の構造主義には限界がある。

第Ⅱ部

2. 4章

レスニクやシャピロといった従来の多くの構造主義者は集合論における構造を基本に据えてきた。では圈論に現れる構造はどういうものか。そこでまずこの議論に必要な圈論の基本用語を提示し、圈論研究から見出される共通認識を取り出し、その後で圈論による数学の基礎づけの方法を述べる(第4章)。

3. 5章 6章 7章

次に、圏論に現れる構造に関する先行研究として、エラーマンを取り上げる。彼は圏論を具体的普遍者の理論と見なす。圏論における具体的普遍者は図式としての形式とされる。その形式を構造と解釈するなら、彼の見解を圏論に関するインレ構造主義の観点から活用できることが示せる。そして彼の考察は数学の哲学における新たな立場の可能性を示唆する(第5章)。図式はグラフである。そこでグラフを何らかの構造と見なすことによって、圏論に関する構造主義を別様に展開させることができる。この立場をグラフ構造主義と名づける(第6章)。また、数学的構造はグラフに基づくスケッチという概念によって記述される。スケッチに関する諸構造はどのような在り方をしているのか。マルキの論述を参考に、グラフとしてのスケッチから圏へのグラフ準同型によってモデルが具現化することについて論じる(第7章)。

4. 8章 9章

さて我々は、数学における様々な事柄を関手によって説明できる。そこで数学的存在に関して関手に基づく見方が重要になる。このことから、関手によって保存される形式(C構造)を圏論における構造と解釈しうる。そこでローヴェアらの論述を参考にしながら、モノイドと離散力学系という具体例を通して、関手と構造の関係を考察した。射の配列(C'構造)や関手(C構造)、さらには自然変換によって保存される形式(C₁構造)などが構造を表していることがわかる。スケッチに関する諸構造と類比的に、関手によって一方の圏の構造が他方の圏において具現化すると言える(第8章)。このように関手に基づく観点は重要である。特に随伴関手は様々な数学分野に現れるばかりでなく、論理学の基本的な構造も明らかにする。特定の圏であるトポスを基にして、随伴関手を用いて論理学を構築し、意味論を開拓できる(第9章)。

5. 10章

ランドリとマルキは代数的インレ構造主義を提出した。それによると、圏論に現れる構造は各圏の公理による枠組みが定めるスキーマである。彼らの構造主義を、圏論の定義による枠組みに対応するスキーマを認めるように拡張できる。言い換えると、圏論の定義あるいは公理による枠組みが定めるスキーマを、圏論における構造と見なせる。この拡張によって、彼らの構造主義では十分に扱えないが数学で重要な随伴関係や圏における対象の積といった諸構造をも扱えるようになる(第10章)。

6. 11章

上述の考察を整理すると、我々は大きく分けて、グラフとしての構造・関手としての構造・スキーマとしての構造に分類できる。さてローヴェアのいう定集合と可変集合は、圏論の観点から集合概念を一般化したものである。可変集合はトポスの対象であり、定集合は、自然数対象をもち選択公理を満たす well-pointed トポスの対象である。それらのトポスは公理によって表されるので、スキーマとしての構造による特徴づけが可能になる。そ

れではどの構造が最も根本的なのか。集合論でも圏論でも何かに全ての数学を基礎づけるという考えは現段階では確定的でない。それよりも諸形式や諸構造の相互連関を重視する方向が自然なものとして示唆される。

グラフとしての構造も関手としての構造も圏論において定義できる。それゆえスキーマとしての構造に包摂できる。圏論に関する構造主義を立てるなら、(拡張された)スキーマとしての構造を中心に据える考え方は、圏論に現れる構造をすべて扱える点で優れている。しかもこのスキーマは集合論における構造も自然な形で扱えるので、数学におけるあらゆる構造を統一的に捉えることができる。さらにインレ構造主義をとると存在者を過度に認めずに済む。以上の点を総合すると、数学の哲学において、拡張されたスキーマによるインレ構造主義は最も有力な立場の一つであることが結論づけられる。

構造はあくまで静止した形式を記述するには相応しいが、機能という圏論で重要になる一つの側面を適確に捉えられないように思われる。機能を中心におく立場を徹底すると、運動に関するより深い考察が必要となろう。関手とみなされた可変集合が変化や運動を表現できるという観点からの考察は一つの示唆を与えよう(第11章)。

7. 附録

レスニクの構造主義はクワイインの考えを引き継ぐものである。クワイインは数学的対象をどのような在り方をしているものと考えていたのであろうか。彼は不可欠性論証によって数学的対象の存在を正当化し、一種の実在論をとった。彼の実在論は通常の実在論と解釈すると成立が困難である。唯名論とも異なる擬似実在論と解釈すればマディによる批判を回避可能であることを論じた(附録)。

学位論文審査の要旨

主査 教授 中戸川 孝治

副査 教授 山田 友幸

副査 教授 小野 芳彦

学位論文題名

圏論における構造

－数学の哲学における新たな構造主義の可能性－

数学には、自然数と加法演算からなる構造、整数と積法演算からなる構造、さらには抽象的な群や環など、さまざまな構造が現れる。これらの構造には時間と空間のなかで存在する位置を指定することができないため、種々の哲学の問題が生じる。その一つに、数学に現れる構造はどのような在り方をするのかという問題がある。この問題に関する先行研究を広範に収集し、主要な先行研究を批判的に検討した後に、従来提唱されてきた理論より広い範囲にたいして、より適切に適用可能な見解を提示することが本論文の目的である。数学に現れる構造は、従来、集合論を基にして考察してきた。これに対して本論文で申請者は、近年数学の基礎において着目されている圏論を基にした場合、構造をどのようにとらえることができるかという新たな観点からアプローチし、最新の研究文献をふまえて圏論における構造のありかたについて探求している。

1. 本論文の研究成果

第1部第1章では、本論文で取り上げる構造主義と、その先行研究の概要を叙述している。第2章では、構造が具体的体系のなかにあるとするインレ構造主義にたつレスニクの実在論をとりあげ検討している。彼の実在論は個体としての数学的対象に関する実在論であり、構造実在論ではないことを示し、さらに、レスニクのパタン概念を圏論に適用したとき不都合が生じることを指摘している。第3章では、構造は具体的体系に先立ってそれ自身として存在しえるとするアンテレム構造主義を提唱するものとしてシャピロをとりあげている。シャピロの基本用語である、構造、体系、例化、が多義的であることを指摘している。さらにシャピロの構造実在論は集合論による存在感とは相容れないことを明らかにしている。

第2部第4章では、1945年に圏論が創始された経緯、およびそれ以降の圏論の発展の概要を述べ、また、圏論の基本となる諸定義をあたえている。第5章では圏論に現れる構造に関する先行研究として、エラーマンをとりあげている。彼は圏論を具体的普遍者の理論とみなし、

それは、圏論の図式としての形式であるとする。この見解はインレ構造主義の観点から活用できることを本申請者は示している。第6章では、グラフ構造主義を提示する。第7章では、マルキ等の研究をふまえて、グラフに基づくスケッチとして数学的構造をとらえ、続く第8章で、グラフとしてのスケッチから圏へのグラフ準同型によりモデルが具体化できることを確認している。第9章では、圏論における関手(ファンクター)による構造主義を検討している。モノイド、離散力学系という具体例を通して、関手と構造の関係を述べ、さらに、関手により或る圏の構造が別の圏において具現化すると論じている。第10章では、関手の一種である随伴関手をもちいて、論理学を構築し、意味論が展開できることを跡付けている。第11章においては、圏論における構造をスキーマとしてとらえる、代数的インレ構造主義を提唱したランドリとマルキの議論をとりあげている。ここで本申請者は、彼らの構造主義を、圏論の公理だけでなく定義にも拡張する。この拡張により、随伴関手や圏において定義される種々の概念も、拡張された代数的構造主義により扱えるようになることが示される。圏論における構造は、グラフとしての構造、関手としての構造、スキーマとしての構造に分類される。第12章では、これらを比較検討したのち、拡張されたスキーマによるインレ構造主義は、不備な点が最も少ないことをしめしている。

2. 審査の要旨

先行研究としてとりあげたレスニックのインレ構造主義にたいし、本申請者は圏論における構造が解明されえない、という不備があることを指摘している。他方、シャピロが提示するアンテレム構造主義は多義的であり集合論の存在観とは相容れない点を本申請者は指摘している。これらの指摘は、構造主義に関する研究者間の論争の視点を整理させうる新たな成果である。数学に現れる構造にかんする研究として、本論文を際立たせている特徴は、圏論における構造を詳細に分析している点である。圏論における構造を、グラフ、関手(ファンクター)、スケッチ、スキームという活発に研究されている道具をつかって分類し、これらのうち、ランドリとマルキが提唱したスキームによるインレ構造主義がより広い範囲で適用可能であることをしめた。これは、スキームによるインレ構造主義が随伴関手にも対応できるように、新たな着想により、本申請者自身が拡張に成功したからである。なお、本論文でクワインの存在論的基準を論じた箇所には不十分な点が指摘されたが、しかし、本論文の主要結果の脈絡に影響をあたえるに至るものではない。

また、本論文でえられたこれらの個別の成果に加え、本研究は前例のないほどの広範な範囲にわたって先行研究を収集し、それぞれの研究動向について批判的吟味をくわえ、相互の脈絡を論じている。今後、数学の哲学における構造主義を研究するものは、本研究に収集、整理された知見の水準から出発できる。このことが、今後の研究に貢献していくことには疑いがない。

これらの点を総合的に評価し、審査委員会は、本論文の著者齊藤健氏に博士(文学)の学位を授与することが妥当であるとの結論に達した。