

学 位 論 文 題 名

Construction of Field Theories on Noncommutative Four Sphere

(非可換 4 次元球面上の場の理論の構成)

学位論文内容の要旨

非可換時空とは時空の座標が通常の数ではなく、行列のように非可換な演算子と考えられる時空の事をいう。最近の超弦理論の発展の過程で、我々の住む時空が短距離では非可換幾何学によって支配されているかもしれないという考え方が生まれてきている。

超弦理論は重力理論と量子論を矛盾なく統合できる理論と考えられているが、この理論は低エネルギーでは通常のアインシュタイン重力になるのに対し、プランクスケール ($\ell_{Pl} \sim 10^{-33}\text{cm}$) 付近では弦のモードが励起されて性質が大きく異なるようになる。その一つの例が非可換性である。超弦理論には D ブレーンと呼ばれるソリトン解があるが、この D ブレーンを N 枚重ねた配位は $N \times N$ 行列で表され、D ブレーンを記述する変数は非可換な行列になる。その結果、弦理論を構成的に記述する理論は行列を力学変数とする行列模型になると考えられている。

このような弦理論の発展と平行して、非可換時空やその上の場の理論の性質を調べる研究が盛んに行われるようになってきている。その目的は超弦理論の有効理論としての研究というだけでなく、非可換性より生じる非局所性のために非可換な場の理論が通常の場合の理論と比べてどのように異なる性質を持つかを調べることにある。

これまでに非可換空間上の場の理論を構成することができたのはユークリッド空間 (R^n)、2 次元球面 (S^2) および複素射影空間 (CP^n) である。これらの場合には、理論を記述する手段として行列模型を用いる方法と通常の場合の座標の関数としての場とそれらの間の非可換積を用いる方法とがあり、それらの間の対応関係も知られている。

4 次元球面 (S^4) は曲がった 4 次元空間の簡単な例である。しかし、 S^2 を $SO(3)$ 回転不変な代数を用いて構成したように S^4 を $SO(5)$ 回転不変な代数を用いて構成しようとすると、この代数から得られる多様体は S^4 ではなく局所的に $S^4 \otimes S^2$ という 6 次元の多様体になる。これは構成した $SO(5)$ 回転不変な代数が、座標 $\hat{X}^A$ のみで記述できず余分な自由度が残ってしまうからである。また、 S^4 の場合は S^2 と類似の方法で行列と関数の対応付けを行うことも難しいことが知られている。そこで本研究では余分な自由度が現れないようにしながら行列と関数の対応関係の知られている S^2 を利用して S^4 の配位を考え、これを用いて場の理論を構成した。

まず最初に行列模型の構成から行った。 S^4 の配位を表す行列 $\hat{X}_0^A$ を 2 つの $SO(3)$ の生成子の直積を用いて構成する。

$$\begin{aligned}\hat{X}_0^a &= \frac{\hat{R}}{\sqrt{j_1 j_2 (j_1 + 1) (j_2 + 1)}} \hat{T}_{j_1}^3 \otimes \hat{T}_{j_2}^a \quad (a = 1, 2, 3) \\ \hat{X}_0^i &= \frac{\hat{R}}{\sqrt{j_1 (j_1 + 1)}} \hat{T}_{j_1}^{i-3} \otimes 1_{2j_2+1} \quad (i = 4, 5)\end{aligned}$$

($\hat{T}_j^a$ は $SO(3)$ の spin- j 表現の生成子、 1_n は n 次単位行列) この行列は $(\hat{X}_0^A)^2 = \hat{R}^2 \times 1$ となり半径 $\hat{R}$ の 4 次元球面を表す。この行列の交換関係は非可換である。

この交換関係をもとに「場の強さ」 $\hat{F}^{AB}(\hat{X})$ を定義する。任意の行列 $\hat{X}$ はこの配位 $\hat{X}_0$ とゲージ場 $\hat{A}$ を用いて $\hat{X}^A = \hat{X}_0^A + \hat{A}^A$ と書ける。 $\hat{X} = \hat{X}_0$ で場の強さがゼロとなる ($\hat{F}^{AB}(\hat{X}_0) = 0$) ように $\hat{F}^{AB}$ を定義した。このとき場の強さには不連続性がある。ただし、行列模型では微分は存在しないのでこれ以上強い特異性は現れない。また、この不連続性は有限な値の飛びなので経路積分可能である。そのためこの不連続性は理論に影響を与えないと考えられる。

この場の強さを使って行列模型の作用を $S_0 = \frac{1}{4} \text{Tr} (\hat{F}^{AB})^2$ とおくと、行列 $\hat{X}_0^A$ は運動方程式を満たし真空解となっている。 $\hat{A}$ を摂動とし、真空解の周りで展開を考えると非可換 S^4 上のゲージ理論が得られる。

行列模型による構成ができたので、次に行列と通常の座標の関数としての場の対応関係を考えた。 $\hat{X}_0^A$ が 2 つの $SO(3)$ 生成子のテンソル積で表されていることを利用して、それぞれの生成子を S^2 の座標の多項式に対応させることで S^4 での行列と関数の対応関係を作った。また、 S^2 上の非可換積を用いて S^4 上の非可換積を作った。この際、関数 $D(X) = \pm \sqrt{(X^a)^2}$ が現れ、その正負によって 2 つの S^4 を考えなければならぬことがわかった。また、 S^4 上の関数には $X^a/D(X)$ の形の不定性が存在することもわかった。ただし、非可換な場の理論では関数の微分は背景場 x^A と関数の非可換積の交換子で表され、 S^4 上の関数は非可換積の元で閉じているので、微分で新しい特異性はない。この関数の不定性は見かけの不定性だと考えられ、多様体 S^4 を 2 つの座標近傍 $U_1 = \{(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 \geq R^2/2\}$ と $U_2 = \{(X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 \geq R^2/2\}$ で覆い各座標近傍で適当な座標系に入れ替えることで取り除くことができる。

最後にこのように構成された非可換な S^4 上のゲージ理論が真空解以外の解 (インスタントン解) を持つようにできるかどうかを調べた。まず半径 $\hat{R}$ が大きい極限で j_1, j_2 を適当にスケールさせると、非可換なユークリッド空間 R^4 が得られることを示した。続いてインスタントン解を構成するため、双対 $\hat{F}^{AB}$ の定義式を非可換 S^4 に拡張し、双対変換を 2 度 F^{AB} に行うと元に戻るようにした。ただし、これを厳密に行うのは難しいので $1/\hat{R}^2$ 展開を用い、1 次の精度で拡張できることを示した。また、球面上の F^{AB} は成分がすべて独立でなく、 $\{X^A, F^{AB}\} + \dots = 0$ という条件を満たすので、 $\hat{F}^{AB}$ も同じ条件を満たすように拡張できる事を示した。これにより、自己双対条件が解を持つことが保証される。以上の結果を用い、可換な場の理論の場合と同様にして $\hat{F}^{AB}$ が自明に満たす方程式から F^{AB} が満たす運動方程式を求めた。また、非可換積を $1/R^2$ 展開によって求めた。

このように $SO(5)$ 回転不変ではないが非可換な S^4 上の場の理論を定式化する事が可能であり、 S^2 の非可換積を用いることで S^4 の非可換積を作ることができた。この S^4 上の関数には $X^a/D(X)$ の不定性があるが、これは見かけの不定性だと考えられ 2 つの座標近傍で S^4 を覆うことで消すことができた。また、 $1/\hat{R}^2$ の精度ではインスタントン解が存在することもわかった。このときインスタントン解を持つ作用は、 $S = \frac{1}{8} \text{Tr} ((F^{AB})^2 + (\hat{F}^{AB})^2)$ と予想される。

今後の展望としては、この精度で実際にインスタントン解を求めその解の安定性を調べることがあげられる。さらに、 $1/\hat{R}^2$ 展開を用いずに $\hat{F}^{AB}$ を定義することができれば、インスタントン解を持つ完全な行列模型の作用を構成することができると考えられる。また、多様体上で不定性を消すために 2 つの座標近傍で覆うという操作を行列模型においてどのように解釈するべきかを考えることもあげられる。

学位論文審査の要旨

主査	助教授	中山隆一
副査	教授	石川健三
副査	教授	河本昇
副査	教授	山本昌司
副査	助教授	鈴木久男
副査	講師	末廣一彦

学位論文題名

Construction of Field Theories on Noncommutative Four Sphere

(非可換 4 次元球面上の場の理論の構成)

近年、素粒子論において非可換な空間に関する研究が盛んに行われている。非可換な空間とは座標が通常の数のように交換せず、演算子や行列のように非自明な交換関係を満たすものである。このような空間は昔から考えられてきた。一例としては、現在の重力理論では量子化に伴う発散を繰り込む事ができないことが知られており、そのため我々の住む空間がプランクスケール $\sim 10^{-33}\text{cm}$ 以下の非常に短距離で非可換性のような通常とは異なった性質をもつ可能性が議論されている。最近の例としては素粒子の重力を含めたすべての相互作用を統一する理論として期待されている超弦理論でその膜状のソリトン解である D ブレーンが何枚も重なっている時、その上の低エネルギー有効理論がまさに座標非可換な空間上の場の理論になっている。さらに超弦理論を非摂動的に定義するために非可換な行列を変数とする行列模型を用いることも提案されている。このような非可換な空間の場の理論の研究は超弦理論の理解を深めるために重要であるだけでなく、非可換理論には非局所性、紫外—赤外混合、 $U(1)$ インスタントンの存在など、可換理論にはない興味深い現象が有り、非可換理論それ自体を研究することが最近の重要な研究テーマになってきている。

非可換な空間が平坦な場合には座標の交換関係はハイゼンベルグ代数と一致し、これに対応して座標の関数の非可換な積（スター積）を定義することができる。さらにこのスター積を用いて非可換な空間上のゲージ理論の作用を書き下す事ができ、行列を変数とした行列模型を考え、この行列を座標 X^A に対応づけて考えた時にその運動方程式の解が座標の交換関係と同じものを満たすようにすることができる。そこでこの行列模型の作用において、行列を運動方程式の解とその周りの揺らぎに分けて書き、この揺らぎ

をゲージ場と見なすと通常の可換な空間上のゲージ理論の作用の中で積をスター積に置き換えたものに一致する事を示すことができる。これを非可換空間上のゲージ理論と呼ぶ。

この結果を曲がった空間にも拡張しようという試みは続けられてきた。特に、2次元の非可換球面は $SO(3)$ 回転対称性を考えて座標の交換関係を $SO(3) \simeq SU(2)$ リー代数とし、球面の条件式をカシミール演算子が定数に等しいとすることにより得られる。また、 $SU(n)$ リー代数から非可換な複素射影空間も得られている。しかしながら任意の空間の場合に非可換な空間を構成する一般的な方法はまだ知られていない。たとえば4次元球面の場合、 $SO(5)$ 回転対称性から座標 X^A , X^B の交換子が角運動量 L^{AB} に等しいとした、座標と角運動量の生成する $SO(6)$ リー代数が考えられるが、この場合座標 X^A の他に余分な変数 L^{AB} が入っているため、4次元の非可換空間を構成することはできない。

本論文は、このような理由で構成することが困難であった4次元の非可換球面上の場の理論のスター積を構成する新しい方法を示し、その結果を用いて4次元非可換球面上のゲージ理論を構成したものである。4次元球面上のスター積を構成することが可能になった要因は、球面を局所的座標近傍に分け、それぞれの座標近傍でスター積を構成し、それらを貼り合わせて球面全体のスター積を考えたところにある。2次元球面では大局的な構成が可能であったのとは対照的で4次元球面ではこの操作が避けられない。これにより、非可換2次元球面の結果を用いて4次元球面のスター積も構成することができた。また $SO(5)$ 回転対称性は破れる結果になったが、平坦な場合でも回転対称性が破れることからわかるように、非可換空間では対称性は低くなることが知られている。

このスター積は球面の半径が大きい極限で平坦な4次元の非可換空間のスター積と一致し、可換極限も持つことが示された。さらに平坦な非可換4次元空間のゲージ理論にはゲージ群が $U(1)$ の場合でもインスタントン解という非摂動論的な解があり、さらにインスタントン解は可換な球面の場合でも存在するが、このインスタントン解が非可換球面の場合でも存在するかどうかについて、スター積を球面の半径の逆数巾展開することによって調べた。その結果、作用が場の強さの2次式の場合にはインスタントン解が存在することは示せないが、作用に半径の負巾の補正を加えていくことでインスタントン解を持つようにできる事を示した。

これを要するに、著者は、非可換なコンパクト空間上のスター積と場の理論の構成に対して新しい方法を開発したものであり、超弦理論のみならず非可換な場の理論の研究に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。