

Large Scale Finite Element Analyses of Electromagnetic Fields Using Multigrid Method

(マルチグリッド法を用いた電磁界の大規模有限要素解析)

学位論文内容の要旨

近年、数値シミュレーションの分野では、計算機の高速化に伴い一般的なパーソナルコンピュータ上で大規模な解析を行えるようになってきた。電磁界数値解析の分野においても、例えばモータのトルク特性や効率を有限要素解析により求め、設計に活用することが盛んに行われるようになってきた。しかしながら、解析の精度や速度は、まだ十分ではなく、より大規模な解析を高速に解く技術の開発が望まれている。

数値解析手法の代表的手法である有限要素法では、係数行列が大規模疎行列である連立方程式を解く必要があり、解析時間の大部分はこの計算に費やされる。従来、この連立方程式の解法には前処理付き共役勾配法の一つである ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method) 法が広く使われてきた。これは、ICCG 法が他の反復法に比べて収束性がよくかつ種々のパラメータ変動に対してロバストであることによる。近年、この連立方程式の解法としてマルチグリッド法が注目されている。マルチグリッド法は、連立方程式の未知数の数 n に対して $O(n)$ で計算できることが知られており、将来の大規模解析において非常に有力な解法となる可能性がある。マルチグリッド法を用いた有限要素解析ではまず、粗密の異なる複数のメッシュを用意する。そして、一番細かいメッシュに対する連立方程式をガウスザイデル法等の反復解法を数回～数十回程度反復計算したところで計算を打ち切り、近似解を得る (Smoothing 操作)。このとき、誤差の空間的高周波成分が反復の初期段階で速やかに収束する。そこで、残された低周波成分からなる誤差を粗いメッシュに投影する。細かいメッシュから見ると低周波に見える誤差も粗いメッシュから見ると高周波に見えるので、粗いメッシュ上で Smoothing を行えば、残った誤差を速やかに取り除くことができる。これがマルチグリッド法の基本的なアイディアである。マルチグリッド法には幾何マルチグリッド法と代数マルチグリッド法に分類することができる。幾何マルチグリッド法はメッシュの中に歪んだ形状の要素や扁平な要素があるとマルチグリッドの収束が悪くなることが指摘されている。

本研究では、最初に 3 次元静磁場の有限要素解析にマルチグリッド法を適用し、要素形状が収束性に与える影響を、種々の Smoother において比較検討を行った。その結果、マルチグリッド法で一般に用いられる Gauss-Seidel Smoother ではメッシュの中に扁平な要素を含まない場合には ICCG 法と比較して数倍程度高速に計算できることを示した。しかし、メッシュの中に扁平な要素が含まれていた場合に急激に収束性が悪くなり、実用に耐えられないことがわかった。また、ICCG Smoother を用いた場合は Gauss-Seidel Smoother ほどの急激な収

束性の悪化は見られないことを示した。また、Smoothing 回数には最適値が存在し、それが要素の扁平率の最大値と相関があることがわかった。その際、扁平率の指標には要素の最大辺と最小辺の比を用いるのが妥当であることも示した。この扁平率は容易に算出できるため、Smoothing 回数を決定する際の指標として使うことができる。

つぎに、扁平な要素を含むメッシュにおいてマルチグリッド法の収束が悪化する原因を数値実験および、係数行列の固有値分布の解析を通して究明した。その結果、扁平な要素が含まれていると、Smoothing の過程で、高周波成分の収束が悪くなることを示した。このとき、Gauss-Seidel Smoother が扁平な要素の影響を特に受けやすいことも示した。また、渦電流解析にマルチグリッド法を適用すると、駆動電流の周波数を低くすると、係数行列の条件数が悪化するが、それに伴いマルチグリッド法の収束性が悪化することを示した。またこの場合においても ICCG Smoother がよりロバストであることがわかった。

つぎに代数マルチグリッド法に注目した。この方法は幾何マルチグリッド法とは異なり、最も細かなメッシュを用意するだけで計算を行うことができる特徴がある。このとき、代数的な操作により粗いメッシュに相当する係数行列を生成する。そこで、電磁界解析において、幾何マルチグリッドと代数マルチグリッド法を、収束性、計算に必要なメモリ量、さらにメッシュ生成を含めた総合的な計算時間の比較・検討を行った。その結果、代数マルチグリッド法は、メッシュの質に対してロバストであるものの、計算速度は従来手法である ICCG 法と同程度であり、幾何マルチグリッドより劣ることを示した。

幾何マルチグリッド法は複数のメッシュおよび係数行列をメモリ上に保持する必要があることから、従来方法と比較してメモリの使用量が多くなる欠点がある。そのため、計算速度の面では十分実用的であるにも関わらず、計算機のメモリ上限により、大規模な解析が行えない場合がある。特に一般的なパーソナルコンピュータでは、メモリの容量は数 GByte 程度あり、数百万自由度の解析が限度となる。そこで、最も細かいメッシュ、およびそれに相当する係数行列をメモリ上に保持せずに幾何マルチグリッドの計算を行う手法を提案した。この方法では、粗いメッシュから、細かいメッシュおよび係数行列の必要な部分のみを生成しながら計算を進める方法である。これにより計算時間は増加するものの、メモリの使用量を従来の幾何マルチグリッド法と比較して約 1/4 に減らすことができた。これにより、従来の手法では困難であった 1 千万自由度を越える解析をパーソナルコンピュータ上で行えることを示した。

最後に以上を要約すると、本研究では、電磁界の有限要素解析において必要となる連立方程式の解法の一つであるマルチグリッド法に注目し、以下の知見を得た。百万自由度を超えるような大規模解析においては従来解法よりも高速である。扁平な要素を含むメッシュに対して収束性が悪化する問題が知られていたが、その収束性の悪化が主に Smoothing 過程において生じていることを明らかにし、CG 法や ICCG 法を Smoother として用いると改善される。また代数マルチグリッド法はメッシュの質に影響を受けにくい、計算時間は従来手法と同程度の速度である。幾何マルチグリッド法は複数のメッシュが必要であるためメモリの使用量が増加し、大規模解析の妨げとなっている。そこで、粗いメッシュのデータのみを用いて計算を行う手法を開発し、これにより大規模な解析が行えることを示した。

学位論文審査の要旨

主査	教授	五十嵐	一
副査	教授	本間	利久
副査	教授	北	裕幸
副査	教授	小野里	雅彦

学位論文題名

Large Scale Finite Element Analyses of Electromagnetic Fields Using Multigrid Method

(マルチグリッド法を用いた電磁界の大規模有限要素解析)

近年、数値解析の分野では、計算機的高速化に伴い、大規模な解析を行えるようになってきた。電磁界数値解析の分野においても、例えばモータのトルク特性や効率を有限要素解析により求め、設計に活用することが盛んに行われるようになってきた。しかしながら、解析の精度や速度はまだ十分ではなく、より大規模な解析を高速に解く技術の開発が望まれている状況にある。

本論文は、大規模な連立方程式の高速解法であるマルチグリッド法に着目し、電磁界の有限要素解析にマルチグリッド法を適用する場合の種々の問題点の解決を目的としたものである。マルチグリッド法は、連立方程式の未知数の数に対して線形のオーダで計算できることが知られている。マルチグリッド法を用いた有限要素解析ではまず、粗密の異なる複数のメッシュを用意する。そしてこれらのメッシュとガウス・ザイデル法等の反復解法が持つ誤差の空間的高周波成分が反復の初期段階で速やかに収束する性質を利用して、連立方程式を高速に解くのがマルチグリッド法である。このときに利用する反復解法を特にスムーザーと呼んでいる。またマルチグリッド法には幾何マルチグリッド法と代数マルチグリッド法に分類することができる。幾何マルチグリッド法はメッシュの中に歪んだ形状の要素や扁平な要素があるとマルチグリッドの収束が悪くなることが指摘されている。

本論文では、最初に3次元静磁場の有限要素解析にマルチグリッド法を適用し、要素形状が収束性に与える影響を、種々のスムーザーにおいて比較検討を行っている。その結果、マルチグリッド法で一般に用いられるガウス・ザイデルスムーザーを用いると、メッシュの中に扁平な要素を含まない場合には従来解法と比較して数倍程度高速に計算できることを示している。また、メッシュの中に扁平な要素が含まれていた場合、ガウス・ザイデルスムーザーを用いた場合には収束性が顕著に悪化するのに対して、ICCG スムーザーを用いた場合には収束性の変化が少なく、このICCG スムーザーがメッシュの質に対してロバストであることも示している。

つぎに、扁平な要素を含むメッシュにおいてマルチグリッド法の収束性が悪化する原因

を数値実験および、係数行列の固有値分布の解析を通して追求している。その結果、偏平な要素が含まれていると、スムージングの過程で、高周波成分の収束が悪くなることを示し、特にガウス・ザイデルスムーザーが偏平な要素の影響を特に受けやすいことも示している。さらに、ガウス・ザイデルスムーザーと他のスムーザーとの収束性の違いを明らかにしている。

また、本論文では代数マルチグリッド法に注目している。この方法は有限要素解析において最も細かなメッシュを用意するだけでマルチグリッドの計算を行うことができる特徴がある。そこで、電磁界解析において、幾何マルチグリッドと代数マルチグリッド法を、収束性、計算に必要なメモリ量、さらにメッシュ生成に必要な計算時間等の実用上の見地からの総合的な比較・検討を行っている。その結果、代数マルチグリッド法はメッシュの質に対してロバストであるものの、計算速度は従来手法と同程度であり、幾何マルチグリッド法より劣ることを示している。さらに、計算に必要なメッシュ等のデータ構造の検討を行い、適切なデータ構造を用いることで、前処理を含めたマルチグリッドの全ての計算過程が未知数の数に対して線形のオーダーで計算できることも示している。

幾何マルチグリッド法は複数のメッシュおよび係数行列をメモリ上に保持する必要があることから、従来方法と比較してメモリの使用量が多くなる欠点がある。そのため、計算速度の面では十分実用的であるにも関わらず、計算機のメモリ上限により大規模な解析が行えない場合がある。そこで、本論文では、最も細かいメッシュおよびそれに相当する係数行列をメモリ上に保持せずに、粗いメッシュのデータを用いて幾何マルチグリッドの計算を行う手法を提案している。この方法を用いることで、計算時間は増加するものの、メモリの使用量を従来解法と比較して約 1/4 に減らすことが示されている。これにより、従来の手法では困難であった 1 千万自由度を越える大規模解析をパーソナルコンピュータ上で行えることを示している。

これを要するに、筆者は、電磁界の有限要素解析に連立方程式の高速解法であるマルチグリッド法を適用した場合に生じる問題点を解決する新知見を得たものであり、電気機器の高性能化や設計開発の期間短縮に貢献するところ大なるものがある。よって筆者は、北海道大学博士（工学）の学位を授与される資格あるものと認める。