

Dynamics of Complex Systems : one-dimensional cellular automata, function dynamics and quantum walks.

(複雑系ダイナミクス：一次元セルオートマトン、関数写像系、量子酔歩)

学位論文内容の要旨

複雑系とよばれる対象は、カオスの挙動を示す系に対する既存の研究手段の適用しがたい対象について与えられた総称である。本研究は一次元セルオートマトン、関数写像系、量子酔歩という対象に関し、数学的な見地から既存の手段を適用しつつ、適用外の現象については新たな手段を試みた。以下、各部の内容について概要を示す。

第一部

一次元セルオートマトンは推移写像に関する可換な連続写像（ファクター）とみなすことができる。カオスの力学系に対しては軌道の様な伸長性を利用し、与えられたポテンシャル関数から定義される転送作用素の最大固有値に関する固有空間の単純性を示すことで平衡測度の存在と一意性を証明できる。この場合に鍵となる事実是一片の逆像の数が有界に押えられていることとポテンシャルの有界変動性であった。

ファクターの場合、一片の逆像の数は「高々有界」あるいは「非加算無限濃度」のいずれかであることが証明され、前者はファクターの全射性と同値である。数値実験で確認されている豊富な現象は、ランダムな初期配置からアトラクタへの漸近挙動において観測されており、全射性を仮定することはできない。そこで、以下に述べる解析を行った。以下、ファクターを τ と書く。

ポテンシャルを与えた場合、典型的なカオスの力学系である位相混合的マルコフ型推移写像 (X, σ) に関しては熱力学的形式によって自由エネルギーとエントロピーの間の変分原理が判明している。さらに、自由エネルギーは周期点に関するポテンシャルの重みのもとでの力学系のゼータ関数に対する収束半径に相当していることがわかっている。

推移写像によって不変な集合はファクター τ によってその部分集合に写像され、また不変集合になっている。ランダムな初期配置をベルヌイ型の推移写像とみなすことで、位相混合的な推移不変集合の列 (X_n, σ) を τ の繰り返しによって得る。これは sofic 型の推移不変集合であり、熱力学的形式の展開に問題は生じない。 (X_n, σ) とポテンシャルとの組に相当する自由エネルギーの列 $P_n(U)$ を得るが、この自由エネルギーの列の漸近挙動とファクターによる不変集合 (X_n, σ) の τ に関する安定性との関係を得た。

自由エネルギーが指数関数的に収束する枠組を与え、それを利用して多項式的に収束する例を与えた。これらは局所的なダイナミクスの拡大、消滅する例にもなっている。

ファクター τ が保存量を持つ場合は局所写像が持つ酔歩の再帰時間との関係を利用してさらに詳細な結果を得る。

状態空間を $\{0, 1\}$ の二値として "1" の数を保存する局所写像を考える。初期分布を p -ベルヌイで定める。このとき、ダイナミクスは特定の $p = p_c$ で相転移を起こす。特に p_c の付近ではアトラクタへの収束が非常に遅くなる現象を観察できる。

これは配置を酔歩の路と同一視するとダイナミクスが路から路への局所的な対応として記述でき

ることから説明される。特に酔歩の再帰時間による評価から、 p_c の付近で多項式程度の収束、 p_c から離れた領域では指数関数的な収束を示す量を与えることができた。この量はダイナミクス固有の分布と初期分布との相対エントロピーを含んでいる。

第二部

関数写像系は区間上の写像の上の力学系である。数値計算によれば極限での挙動は細分化された区間上で何らかの力学系が反復されている現象として捉えられた。予想を数学的な結果としてまとめ、不動写像の性質に関する定理と初期関数の不安定不動点の安定化に関する定理、ダイナミクスを生成する力学系に関する定理にまとめた。本研究は高橋 (RIMS)、片岡 (RIMS)、金子 (東大) との共同研究であり、各定理の検討と証明を行った。

単位区間上の写像列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $0 < \varepsilon < 1$ を与え $f_{n+1} = (1 - \varepsilon)f_n + \varepsilon f_n^{\circ 2}$ と定義される。このダイナミクスにおいて不動点となる写像 f_∞ は関数方程式 $f_\infty = f_\infty^{\circ 2}$ の解である。この解に関する簡単な考察を行い、数値計算で見られる階層構造の性質を決めていることを示した。

次に各 f_n の不動点に関する結果を与えた。 f_n の不動点は f_{n+1} の不動点の部分集合になるが、その安定性に関して解析した。特に f_n の不安定不動点が f_{n+1} で安定化する条件を与え、これは数値計算で見られる微細構造に相当することを観察した。

最後に単位区間上の生成力学系 $g_n(x) = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon f_n(x)$ の性質に関する結果を示した。 x を与えた場合の $f_n(x)$ の挙動は $f_{n+1}(x) = g_n(f_n(x))$ によって決まる。つまり、ある写像によって $f_n(x) = T^n x$ となれば通常の力学系として扱える。これを g_n の極限 g_∞ として与えた。

第三部

量子酔歩は量子アルゴリズムを実装する際の基本と考えられている。確率振幅を考える際には量子酔歩においても通常の酔歩と同様の路概念を適用でき、二項分布に相当する一般項を得た。同時に吸収壁への到達確率振幅を通常の酔歩における吸収確率と同様の手法で与えた。本研究は今野 (横国大) と共同で行い、上記の部分を行った。

$\mathbb{Z}$ 上の量子酔歩は 2 次ユニタリ行列 U と $\mathbb{C}^2$ 上の規格化された状態 ψ とから定まる。 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおき、 $P = E_1 U$, $Q = E_2 U$ で左への作用 P と右への作用 Q を定義する。初期状態として原点に ψ を置き、 P と Q とによって時間 n での位置 k における確率振幅を $\Xi_{n,k}\psi$, $\Xi_{n+1,k} = P\Xi_{n,k+1} + Q\Xi_{n,k-1}$, $\Xi_{0,0} = id.$ として定義できる。時間 n での位置 k における存在確率は $|\Xi_{n,k}\psi|^2$ である。 Ξ は行列 P, Q の積によって通常の酔歩と同様の路上に確率振幅の和を定めている。 P, Q に続いて $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U$ を導入することで、 $M_2(\mathbb{C})$ の完全正規直交系を得る。これによって $\Xi_{n,k}$ は P, Q, R, S の一次結合により一意に書け、その計数を数え上げることで二項分布に相当する Ξ の一般項を与えた。同時に確率密度を求め、その形状は両側に山をもつこと、および対称性に関する結果を得た。この結果はヤコビ多項式の漸近評価による極限分布の決定につながっている。

同様に、 Ξ に関する漸化式を用いれば吸収壁が存在する場合の吸収確率振幅を通常の酔歩と同様に差分方程式の解として定められることを示し、特別な場合に吸収確率を与えた。

学位論文審査の要旨

主査	教授	津田一郎
副査	教授	新井朝雄
副査	助教授	松本健司
副査	助教授	坂上貴之

学位論文題名

Dynamics of Complex Systems : one-dimensional cellular automata, function dynamics and quantum walks.

(複雑系ダイナミクス：一次元セルオートマトン、関数写像系、量子酔歩)

複雑系の動力学に関する研究は多岐にわたるが、著者はカオスの挙動を示す系に対して既存の力学系の研究手法が通用しがたい系を複雑系として規定し、研究対象として1次元セルオートマトン、関数写像系、量子酔歩を取り上げ、個々において新しい研究技法を考案した。本論文はこれら三テーマの研究結果を扱った三部構成で成り立っている。カオス力学系の熱力学形式はすでに80年代に得られているが、著者は一次元セルオートマトンの漸近挙動の熱力学的定式化を初めて行なった。1次元セルオートマトンはシフト可換な連続写像（ファクター）とみなすことができる。漸近挙動を問題にするとき過渡現象を追跡する必要が生じるが、ここにおいて全射性が仮定できないことによる困難が現れる。著者はこれをファクターの繰り返しによって得られる自由エネルギーの列の漸近挙動とファクターの不変集合の間の関係を得ることで解決した。カオス力学系においては、周期点の個数分布から分配関数が定義され、それから周期に関する重みつき和の指数としてゼータ関数が定義できる。同様な定式化を1次元セルオートマトンに対して行なうことで、著者はカオス力学系に対して高橋陽一郎が得たゼータ関数と類似の表式を1次元セルオートマトンに対して得た。これにより、位相的エントロピーに対する収束性が厳密に定式化でき、収束が指数関数やべきになる条件が有限状態オートマトンに対して与えられた。著者はこの理論を交通流の問題、および非常に長い過渡的挙動を示す例を構成することで万能計算との関係にも示唆を与えている。区間上の力学系の上の写像である関数写像に関して、不動写像の性質、及び初期関数の不安定不動点の安定化に関する定理、ならびにダイナミックスを生成する力学系を発見しこれに関する定理を得た。これらの定理により、極限関数が存在する定義域の集合上のダイナミックスが決定され、その集合上の極限関数は不動点のみを持つことなどが明らかになった。これらは数値計算で知られていた結果を数学的に厳密に定式化したものである。量子酔歩の研究は始まったばかりであり、著者の研究は先

駆的なものの一つに数えられる。量子酔歩は古典的な酔歩、いわゆるランダムウォークの量子版である。また、量子酔歩は強電子相関のシュレーディンガー方程式を計算するときの計算アルゴリズムとしても利用されており、応用面からも研究が期待されているテーマである。確率振幅に着目すると量子酔歩においても古典酔歩と同様な路の概念が定義できる。量子的酔歩では古典的酔歩とは異なる分布が得られるが、著者は二項分布に相当する一般項を導くこと、ならびに吸収壁への到達確率振幅を与えることに成功した。以上のよう、著者の研究は複雑系数理学、応用数学、カオス力学系の発展に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。