

## 学位論文題名

Interpretations of algebraic quantum theory  
in terms of beable algebras

(存在可能量代数をもちいた代数的量子論の解釈)

## 学位論文内容の要旨

量子力学によると、ある物理系の状態が  $\psi$  であるとき、「物理量  $A$  の値が  $a$  である」という観測命題が観測される確率は  $\psi$  によって与えられる。古典統計力学と同様に、観測命題すべての真偽が観測とは独立に確定している隠れた状態が存在して、 $\psi$  によって与えられる確率は隠れた状態全体の集合上の確率分布であると解釈できるかどうかは、古くから議論されてきた。本論文の Chapter 3 では、この問題を作用素代数の観点から考察する。そして、非相対論的量子力学と同様に代数的場の量子論においても互いに両立可能な観測命題に関する条件のみを課した隠れた状態が存在しないということを確認する。

一方、観測命題すべての真偽が確定しているとみなすことができないとしても、観測命題すべての集合の部分集合が存在して、その部分集合に属する観測命題に対する真理値付値が存在する場合がある。Halvorson と Clifton は、任意の正規状態  $\rho$  に対して存在可能量代数とよばれる代数を定義した。 $\rho$  は、 $\rho$  に対する存在可能量代数上で、ゼロ分散状態の混合としてかける。存在可能量代数上の任意のゼロ分散状態  $\omega$  は、有限個の射影作用素に対しては、真理値付値とみなすことができる。例えば、 $P$  と  $Q$  という存在可能量代数に含まれる互いに可換な射影作用素に対して、 $\omega(P) = \omega(Q) = 0$  であれば、 $\omega(P \vee Q) = 0$  となる。つまり、 $P$  と  $Q$  がともに偽であれば、 $P \vee Q$  も偽であると解釈することができる。本論文では、存在可能量代数をもちいて、非相対論的量子力学の解釈と代数的場の量子論の解釈を扱う。非相対論的量子力学を解釈する際、存在可能量代数をもちいることによって、有限次元のヒルベルト空間では存在しなかった無限次元のヒルベルト空間に特有の真理値付値に関する問題点が明確になる。また、存在可能量代数は作用素代数の観点から定式化されているので、存在可能量代数をもちいて代数的場の量子論を解釈すると、作用素代数に関する様々な数学的性質を利用することが可能になる。

Chapter 4 では、非相対論的量子力学の解釈を、存在可能量代数上のゼロ分散状態に注目して検討する。任意の物理量が生成する可換フォンノイマン代数は、存在可能量代数となる。つまり、存在可能量代数は一意には決まらない。ここでは、密度作用素によって決まる存在可能量代数と位置作用素によって決まる存在可能量代数を扱う。Section 4.2 は、存在可能量代数に可算無限個の互いに直交する 0 でない射影作用素の集合  $\{P_i | i \in \mathbb{N}\}$  が含まれるとき、あるゼロ分散状態が存在して、 $\{P_i | i \in \mathbb{N}\}$  に属する任意の射影作用素が偽であるにもかかわらず、 $\bigvee_{i \in \mathbb{N}} P_i$  が真となることがあるということを証明する。このゼロ分散状態は妥当な真理値付値とはよべない。しかし、

密度作用素によって決まる存在可能量代数の場合、その存在可能量代数上の任意の正規状態は、 $\{P_i | i \in \mathbb{N}\}$  に属する任意の射影作用素が偽であるときは必ず  $\bigvee_{i \in \mathbb{N}} P_i$  も偽となるような性質をもつゼロ分散状態の混合状態としてかける。このとき、「正規状態による記述は不完全であり、真の状態は  $\{P_i | i \in \mathbb{N}\}$  に属する任意の射影作用素が偽であるときは必ず  $\bigvee_{i \in \mathbb{N}} P_i$  も偽となるような性質をもつゼロ分散状態である」という解釈ができる。

Section 4.3 では、位置作用素によって決まる存在可能量代数の場合、ゼロ分散状態を真理値付値と解釈すると、任意のゼロ分散状態に対して、ボレル集合の集合  $\{S_i | i \in \mathbb{N}\}$  が存在して、任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対して物理的対象は  $S_i$  の中に存在しないにもかかわらず、 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  には存在するというを示す。つまり、位置作用素によって決まる存在可能量代数の場合、ゼロ分散状態は妥当な真理値付値と解釈することはできない。そこで、ゼロ分散状態は、「物理的対象の位置は  $S$  である」という観測命題に対する確率をあたえると考えることにする。次に、任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して、任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$  で物理的対象が観測される確率が 1 となるようなゼロ分散状態が存在することを示す。また、このようなゼロ分散状態の集合を  $S_\lambda$  とすると、位置作用素から決まる存在可能量代数上の任意の正規状態は  $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} S_\lambda$  に属するゼロ分散状態の混合でかけると示す。そこで、ゼロ分散状態の集合  $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} S_\lambda$  に注目し、 $S_\lambda$  を「物理的対象は点  $\lambda$  に存在する」という存在命題と解釈する。

Chapter 5 では、代数的場の量子論の解釈を取り上げる。代数的場の量子論では、ミンコフスキー空間の有界な開集合にフォンノイマン代数を対応させ、このフォンノイマン代数に物理的に妥当な条件を課する。このようなフォンノイマン代数は局所代数とよばれる。局所代数に含まれる射影作用素は、その局所代数に対応するミンコフスキー空間の有界な開集合における観測命題とみなされる。Clifton は、局所代数のなかの存在可能量代数は状態のみから決まると考えて、極大な存在可能量代数を決定した。しかし、Clifton は、ある特殊な正規状態に対する存在可能量代数のみを決定していた。Chapter 5 では、Clifton が考えた条件と同じ条件のもとで、任意の正規状態に対する存在可能量代数を決定する。その結果、この解釈は非相対論的量子力学における固有値・固有状態リンクの拡張になっていることが明らかになった。

# 学位論文審査の要旨

主 査 教 授 石 垣 壽 郎  
副 査 教 授 杉 山 滋 郎  
副 査 教 授 石 川 健 三  
副 査 教 授 加 藤 幾 芳

学 位 論 文 題 名

## Interpretations of algebraic quantum theory theory in terms of beable algebras

(存在可能量代数をもちいた代数的量子論の解釈)

科学哲学における立場のひとつに科学的実在主義がある。これは、次のようにまとめられる。経験的に（つまり実験や観測によって）十分確かめられた科学理論があると、その理論が与える世界の描像は、経験的に直接確かめられない部分も含めて、世界の真なる描像になっている、と考える立場である。科学理論は、通常、その理論に特有の世界描像とともに提出される。しかし、量子力学は、特にハイゼンベルグに代表されるように、観測量の間の確率を計算する数学的アルゴリズムとして提出されたという経緯があり、そのようなアルゴリズムが与える世界描像は何か、あるいはそもそも世界描像を与えうるのか、といういわゆる量子力学の解釈問題を生じた。

本論文は、代数的に定式化された量子力学の解釈問題を、存在可能量 (beable) 代数を用いて考察したものである。物理量全体がなすフォン・ノイマン代数上の量子的状態は確定的世界描像を与えないが、部分代数を上手くとると、この代数に制限した量子的状態をゼロ分散状態の混合として書くことができる。このような部分代数を存在可能量代数と言う。これに関して、本論文は、存在可能量代数の極大代数はどのようにして決まるかという問題と、そのような極大代数において、ゼロ分散状態は確定的な世界描像を与えているかという問題に対して、貴重な結果を証明した。まず、ある種の極大な存在可能量代数において、確定的世界描像を与える真理値付値として解釈できないゼロ分散状態が存在することを証明したが、他方では、密度作用素から決まる極大存在可能量代数においては、正規状態は正規なゼロ分散状態の混合となり、確定的世界描像を与えると解釈できることを示した。いま、位置作用素のスペクトル射影作用素  $E(\Delta)$  ( $\Delta$  はボレル集合) 全体の集合を  $\mathbb{P}$  とおくと、フォン・ノイマン代数  $\mathfrak{M} := \mathbb{P}''$  において、ゼロ分散状態は真理値付値と解釈できないことを示した。これに対して、 $S_{\mathfrak{M}}$  を  $\mathfrak{M}$  上のゼロ分散状態全体の集合として、 $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して、

$$S_{\lambda} := \{\omega \in S_{\mathfrak{M}} | \forall \epsilon > 0 \omega(E((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon))) = 1\}$$

とおくと、 $\mathfrak{M}$  上の任意の正規状態は  $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} S_{\lambda}$  に属するゼロ分散状態の混合で書けることを

示し、これらのゼロ分散状態は「対象が確定的位置にある」ことを表現しているとする解釈を提出した。最後に、代数的な場の量子論における極大な存在可能量代数が定まる場合について、Clifton が特殊な正規状態について導いていた結果を、その条件をはずして任意の正規状態に関して同じ結果を導くことに成功した。これらの結果は、この分野の研究を確実に一歩進めるものである。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。