

学 位 論 文 題 名

Optimal hedging in the presence of shortfall risk

(ショートフォールリスクが存在する場合の最適ヘッジング)

学位論文内容の要旨

一般の金融市場モデルにおいて、すべての条件付請求権 H が優複製可能であることはよく知られている。すなわち、 $(X_t^{x,\pi})_{0 \leq t \leq T}$ を初期資産が x で、取引戦略が $(\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ のポートフォリオの価値確率過程とすると、確率 1 で $X_T^{x_H,\pi_H} \geq H$ となる初期資産 x_H と取引戦略 π_H が存在する。しかし、与えられた初期資産 x が H の優複製コスト x_H よりも小さい時には、各戦略 π に対し、 $H > X_T^{x,\pi}$ となる確率が正になる。このような状況をショートフォール (赤字) リスクが存在するという。ショートフォールを考慮した場合のヘッジングの問題は、単期間モデルにおいては、マーコビッツの平均-分散理論の発展形として 70 年代後半から研究されていたが、多期間または連続時間モデルに対しては、確率過程論の枠組みの中で、Föllmer-Leukert (Finance Stoch., 1999, 2000) などにより近年盛んに研究されるようになった。

このような流れを受けて、本論文ではショートフォールリスク存在下における投資戦略決定の問題を以下の 3 部に分けて論じる：

- I. Efficient hedging with coherent risk measure
- II. Minimizing coherent risk measures of shortfall in discrete-time models with cone constraints
- III. Minimization of shortfall risk in a jump-diffusion model

Föllmer-Leukert においてはショートフォールのリスク尺度はショートフォールの実数値凸関数の期待値によって定義されている。第 1 部では、Artzner et al. (Math. Finance, 1999) において導入された Coherent Risk Measure (CRM) と呼ばれるリスク尺度を用いる。これは、適当な確率変数の空間の上の汎関数であり、経済学の見地から望ましい性質によって公理的に定義される。現在実務で広く使われている VaR(Value-at-risk) の欠点を補う CVaR(Conditional Value-at-risk) が CRM の代表的な例である。一般の CRM をショートフォールのリスク尺度として用いたのは本研究が初めてであると思われる。

考える金融市場はセミマルチンゲールモデルによって記述されるとし、取引コストなどの市場の摩擦要因は考慮しない。 ρ を $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の CRM とし、

確率制御問題

$$\min_{\pi} \rho(-\max(0, H - X_T^{\pi, \pi}))$$

としてショートフォールリスク最小化問題を定式化する。次に、解析の基礎として、可積分確率変数の空間 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の CRM に対する表現定理を証明する。これは適当な連続性をもつ CRM を、ある確率測度の族に関する期待値の $\sup$ として表すものである。この結果は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ や $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対しては既に知られていたが、 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のような空間で理論を展開した方が解析の都合が良いと考えたためである。この表現定理を用いて基本的な解の存在定理を証明する。また、特殊な設定において、Neyman–Pearson の補題を使って具体的な最適解を構成する。

第2部では、第1部に続いて、CRM によるショートフォールリスク最小化問題を考察する。金融市場は取引戦略に制約を課した離散時間モデルとし、第1部のアプローチをより発展させる。この問題に対しては従来の確率制御の手法が適用できない所が難しい点である。凸解析の常套手段に従い、元の問題をその双対問題へ帰着させるというのが基本的な方針である。双対ギャップがないことを示すために、Cvitanić–Karatzas (Bernoulli, 2001) による議論の拡張を用いる。これは非線型関数解析の結果を応用する抽象的な議論であるが、この方法により、最適解の構成の理論的な手順が明らかにされる。

Föllmer–Leukert の論文では、市場モデルが完備と呼ばれる性質を満たす場合に、最適な最終富の明示的表現が与えられている。しかし、この最終富を構成する投資戦略を具体的に求めることは一般には難しい。第3部では、完備市場のひとつの例である jump-diffusion モデルに対して、Föllmer–Leukert と同様のショートフォールリスク最小化問題について研究する。戦略の集合をより解析に適した形に定義し直した上で、最適解が、ターゲットの完全ヘッジングの戦略とある効用最小化問題の解戦略の差で表せるという数学的にきれいな形の定理を証明する。これはリスク最小化戦略の具体的な構成を実現した数少ない結果のうちのひとつであると言える。

学位論文審査の要旨

主 査 助教授 井 上 昭 彦
副 査 教 授 津 田 一 郎
副 査 教 授 神 保 秀 一
副 査 助教授 三 上 敏 夫

学 位 論 文 題 名

Optimal hedging in the presence of shortfall risk

(ショートフォールリスクが存在する場合の最適ヘッジング)

一般の金融市場モデルにおいて、すべての条件付請求権は優複製可能である。しかし、与えられた初期資産が優複製コストよりも小さい時には、いかなる投資戦略に対しても、ショートフォール（赤字）の起こる確率は正になる。ショートフォールを考慮した場合の最適ヘッジングの問題は、単期間モデルにおいては、マーコビッツの平均-分散理論の発展形として 1970 年代後半から研究されていた。近年、多期間または連続時間モデルに対しても、同じ問題が、確率過程論の枠組みの中で、盛んに研究されている。しかし、このテーマには、リスク尺度の選択や空売り等の種々の制約に関するものなど、今後の発展が待たれている多くの事柄がある。

本論文は、このような現況にあるショートフォールリスク存在下における最適ヘッジングの問題について、いくつかの新しい観点でもって、より現実的な、従ってより難しい設定に対して、理論的な深い考察を行っている。内容は大きく 3 部に分かれる。

第 1 部では、リスク尺度として、**Coherent Risk Measure** (略して **CRM**) と呼ばれるリスク尺度を用いる。これは、現在実務で広く使われている **VaR (Value at Risk)** の欠点を補うことを目的に、**Artzner** 等によって導入された新しいリスク尺度で、経済学の見地から望ましい性質によって公理的に定義される。一般の **CRM** をショートフォールのリスク尺度として用いたのは本研究が初めてである。解析の基礎として、著者は、可積分確率変数の空間上の **CRM** に対する表現定理を証明する。そして、この表現定理を用いて基本的な解の存在定理を証明する。また、特別な場合には、**Neyman-Pearson** の補題を用いて具体的に最適解を構成する。

第 2 部では、第 1 部に続いて、**CRM** によるショートフォールリスク最小化問題を扱うが、金融市場モデルとしては、取引戦略に制約を課した離散時間モデルを考察する。そして、この場合に、著者は第 1 部のアプローチをより発展させる。この設定では、取引引き戦略に対する制約のために、従来の確率制御の手法が適用できないという難しさがある。著者は、まず、凸解析の常套手段に従い、元の問題をその双対問題へ帰着させる。そして、非線型関数解析の結果を応用する抽象的な議論により、双対ギャップがないことを示す。この方法により、最適解の構成の理論的な手

順が明らかにされる。

第3部では、上のような **Coherent Risk Measure** によるものではなく、実数値凸関数の期待値という古典的なリスク尺度によるショートフォールリスク最小化問題を、完備市場のひとつの例である **jump-diffusion** モデルに対して考察する。完備市場においては、この問題の最適解は存在することは分かっても、それを構成する投資戦略を具体的に求めることは、一般に難しい。ところが著者は、戦略の集合をより解析に適した形に定義し直した上で、そのような最適解をある効用最小化問題の解戦略の差として、具体的に構成してみせた。これは、リスク最小化戦略の具体的な構成を実現した数少ない結果として価値がある。

これは要するに、著者は、ショートフォールリスク最小化問題についての新知見を得たものであり、数理ファイナンスに貢献するところ大なるものがある。

よって、著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める。