博士（理　学）　笹　山　智　司

学位論文題名

On a priori estimates for semilinear heat equations

（半線形熱方程式に対するアプリオリ評価）

学位論文内容の要旨

本研究では，半線形熱方程式 $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$ の初期値問題について考察する。考察する空間領域 Ω は $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$ 内の非有界領域，時間 t は有限時間 T または ∞ までとする。Ω が境界をもつとき，ディリクレ境界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ を課す。非線形項の冪 p は $1 < p < (n+2)/(n-2) =: p_s$ とする。ここで，p_s とはソボレフの埋蔵定理 $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ の臨界指数である。本研究は，方程式の解のアプリオリ評価（初期値に依存する評価）について研究している。

この半線形熱方程式は，正値解 u について $1 < p \leq 1 + 2/n$ のときすべての解は T を爆発時刻とする爆発解であり，$p > 1 + 2/n$ のときは十分小さな初期値のときは時間大域解，大きな初期値のときは爆発解であることが Fujita('66)，Hayakawa('73)，Kobayashi-Sirao-Tanaka('77) によって示された。半線形熱方程式の爆発や大域解に関する研究がこの Fujita('66) から今日まで様々な研究がなされている。本研究では特に正値とは限らない爆発解と大域解のアプリオリ評価について研究している。このアプリオリ評価を考察することは爆発解の挙動，大域解の漸近挙動などを調べる上で重要な役割をもつものである。

本論文の構成は第１章で $\Omega = \mathbf{R}^n$ での爆発解，第２章で Ω を凸領域としたときの爆発解，第３章で Ω を帯領域に含まれる領域としたときの大域解についてである。

第１章では，ある定数 $C_1 = C_1(n, p, T^{1/(p-1)}\|u_0\|_\infty)$ に対して，すべての爆発解が

$$\|u(t)\|_\infty \leq C_1(T-t)^{-1/(p-1)} \tag{1}$$

を満たすことを示した。ここで，u_0 は初期値，$\|\cdot\|_\infty$ は $L^\infty(\Omega)$ ノルムを表す。(1) で不等号が $\geq$ であることはよく知られている（C_1 は異なる定数）。したがって右辺の冪は改良不能である。$p \geq p_s$ では，(1) を満たさない爆発解が存在することが Herrero-Velázquez('94, $p > (n-2\sqrt{n-1})/(n-4-2\sqrt{n-1}) > p_s$，$n \geq 11$)，Filippas-Herrero-Velázquez('00, $p = p_s$，$3 \leq n \leq 6$) で示されている。したがって $p < p_s$ の仮定も最良である。本研究の結果は Giga-Kohn('87) の結果の拡張になっている。Giga-Kohn('87) では，Ω が $\mathbf{R}^n$ または凸領域のときに正値解または $p < (3n+8)/(3n-4) < p_s$ の条件の下で研究された。本研究ではこの冪 p の制限を p_s まで拡張した。

本研究では，(1) を示すために Giga-Kohn('87) で用いられている変数変換，エネルギー法，補間定理と Quittner('99) で有界領域上での大域解のアプリオリ評価を示すときに用いた逐次正則改良法を組み合わせる。ここでは問題を局所化する必要性があるので，Quittner

の方法を直接適用できない。そのため，新しく局所エネルギー法を構築し局所的な評価をすることによって解決した。

第2章では Ω が凸領域にすべての爆発解が (1) を満たすことを示した。p の制限を $p < p_s$ のように緩めることによって Giga-Kohn('87) の結果を拡張にした。証明は領域に境界があるため，$\Omega = \mathbf{R}^n$ のときの局所エネルギー法を用いて得られる局所的な評価だけでは逐次正則改良法は適用できない。逐次正則改良法では熱方程式の $L^\alpha - L^\beta$ 評価を用いる。変数変換をすることで領域が時間によって変動する。時間変動する領域に対して一般的には熱方程式の $L^\alpha - L^\beta$ 評価は成立しない。時間変動と境界の形状を正確に考慮することで，ここで用いられる時間変動領域の境界付近での熱方程式の $L^\alpha - L^\beta$ 評価を示し解決した。

第3章では，ある定数 $C_2 = C_2(n, p, \Omega, \|u_0\|_\infty, \|u_0\|_2)$ に対して，すべての大域解のアプリオリ評価が

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_\infty \leq C_2 \tag{2}$$

を満たすことを示した。ここで，$\|\cdot\|_2$ は $L^2(\Omega)$ ノルムを表す。本研究の結果は，先に上げた Quittner('99) での結果を有界領域から非有界領域に拡張した。証明は，第1章と同様に逐次正則改良法と局所エネルギー法を用いる。有界領域の場合ではエネルギー法とヘルダーの不等式から $\|u\|_2$ が有界であることが得られていたが，本研究の非有界領域の場合では期待できない。そこで，Ω が帯領域に含まれ $u|_{\partial\Omega} = 0$ の条件から，ポアンカレの不等式を用いることで問題を解決した。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　神　保　秀　一

副　査　　教　授　　儀　我　美　一
（東京大学大学院数理科学研究科）

副　査　　教　授　　中　村　　　玄

副　査　　教　授　　小　澤　　　徹

副　査　　助教授　　利根川　吉　廣

学位論文題名

On a priori estimates for semilinear heat equations

（半線形熱方程式に対するアプリオリ評価）

外力項として温度のベキ乗の非線形項がある半線形熱方程式は、非線形方程式の場合はたとえ拡散項が存在しても、非線形性のため、その初期値問題の解は時間大域的には必ずしも存在しないことの例として1960年代からよく研究されてきている。1980年代後半になると、解が大域的に存在しない場合、その解の存在する最大時間付近での解の挙動について詳細に解明できるようになってきた。解が大域的に存在しない場合、その解は存在最大時刻で、その空間方向の最大値が無限大に発散するので爆発解と呼ばれている。その時刻を爆発時刻という。この爆発解の爆発時刻付近での挙動を解明する上で鍵となる評価に、爆発度合の評価というものがある。一種のアプリオリ評価である。

著者は、半線形熱方程式の爆発解や、大域解に対して、その挙動を解明する上で基盤となる解のアプリオリ評価（解であるとしたら必然的に満たさなければならない不等式）を、従来課されていた解の正値性のような仮定を課さずに証明することに成功した。例えば、半線形熱方程式 $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$ $(p > 1)$ に対して、その初期値問題の爆発解 u は必ず空間次元 n，初期値の最大値ノルム、爆発時刻 T および p のみによる定数 C がとれて

$$|u(x,t)| \leq C(T-t)^{-1/(p-1)},\ x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T)$$

を満たすことを $p < p_S$ の条件のもとで示した。ここで p_S はソボレフの不等式に関係する定数で $n \leq 2$ では $p_S = \infty$, $n \geq 3$ では $p_S = (n+2)/(n-2)$ である。右辺のベキは、対応する常微分方程式 $v_t = |v|^{p-1}v$ が満

たすベキになっているため、これ以上改良できない。一方、$p \geq p_S$ では、この評価が一般には成り立たないことが知られている。この意味で著者の得た評価は、最良である。この問題は1987年に Giga-Kohn によって u が正しいという仮定のもとで示されていたが、それ以来、未解決な問題であった。

著者は、さらにこの評価を任意の必ずしも有界とは限らない凸領域のディリクレ問題の爆発解について拡張した。

一方、上述の半線形熱方程式は、必ずしもすべての解が爆発してしまうのではなく、時間大域解も初期値によっては存在する。このとき、その解が大域的に有界であるか、またその有界性の定数が初期値の細かい形状によらないかといった問題は、この半線形熱方程式の解の時間無限大での挙動を知る上で重要である。有界領域ディリクレ問題に関しては、正値解については $p < p_S$ でその大域解が初期値の最大値ノルムおよび領域と p にのみよる定数でおさえられることが1980年代後半に知られていたが、1990年代後半に Quittner により正値性の仮定が不要であることが示された。著者は、この結果をポアンカレの不等式が成り立つ必ずしも有界とは限らない領域に拡張することに成功した。

著者の手法は、局所エネルギー法で（重みつき）エネルギーを局所化した量に対して、さまざまな不等式を作り、これで得た積分評価に Quittner が用いた逐次正則性改良法を、問題に使えるように変形するものである。著者は、爆発解の問題に対しては、Giga-Kohn で導入されたくりこみ群方程式について、そのリャプノフ関数にあたる重みつきエネルギーをさらに局所化した量を考察した。半線形熱方程式の大域解について、そのエネルギー評価から積分量を評価することは Quittner によっても用いられているが、くりこみ群方程式については、空間方向に局所化しないと、うまくいかない。ここに著者の一番の工夫が見られる。

本博士論文の爆発解に関する部分は Indiana University Mathematical Journal をはじめとする有力国際学術雑誌に既に出版されている。著者は、爆発解、大域解の評価に対して新知見を得たものであり、非線形偏微分方程式論への貢献は大きい。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。